

Mathematik

Abiturprüfung 2016

Prüfungsteil A

Arbeitszeit: 90 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.**

Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

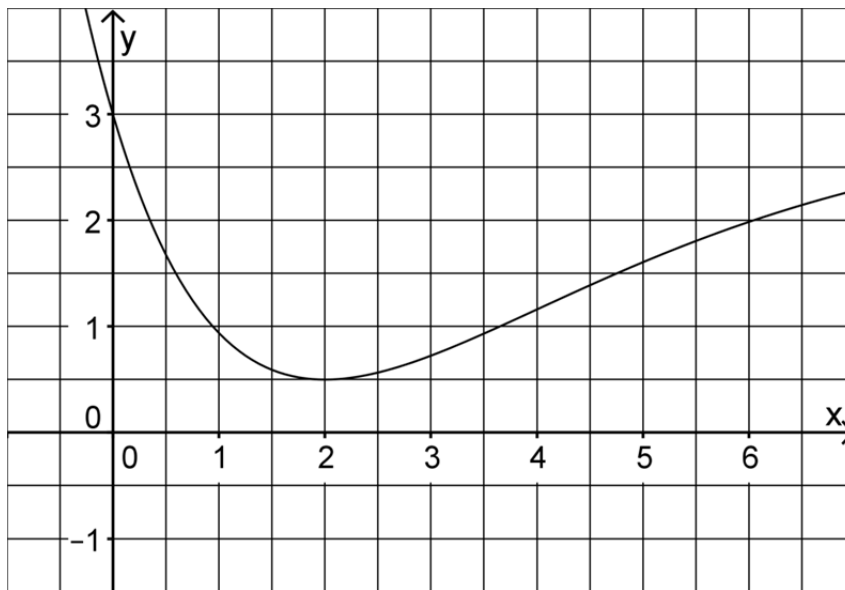
Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

- 1 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \sqrt{1 - \ln x}$ mit maximaler Definitionsmenge D.
- 2 a) Bestimmen Sie D.
- 2 b) Bestimmen Sie den Wert $x \in D$ mit $f(x) = 2$.
- 3 2 Zeigen Sie, dass der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g: x \mapsto x^2 \cdot \sin x$ punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist, und geben Sie den Wert des Integrals $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \sin x \, dx$ an.
- 3 3 Skizzieren Sie im Bereich $-1 \leq x \leq 4$ den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit den folgenden Eigenschaften:
- f ist nur an der Stelle $x = 3$ nicht differenzierbar.
 - $f(0) = 2$ und für die Ableitung f' von f gilt: $f'(0) = -1$.
 - Der Graph von f ist im Bereich $-1 < x < 3$ linksgekrümmt.
- 4 Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion f dritten Grades, deren Graph G_f an der Stelle $x = 1$ einen Hochpunkt und an der Stelle $x = 4$ einen Tiefpunkt besitzt.
- 3 a) Begründen Sie, dass der Graph der Ableitungsfunktion f' von f eine Parabel ist, welche die x -Achse in den Punkten $(1|0)$ und $(4|0)$ schneidet und nach oben geöffnet ist.
- 2 b) Begründen Sie, dass 2,5 die x -Koordinate des Wendepunkts von G_f ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

5 Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f .



2 a) Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für $\int_3^5 f(x) dx$.

Die Funktion F ist die in $\mathbb{R}$ definierte Stammfunktion von f mit $F(3) = 0$.

1 b) Geben Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für die Ableitung von F an der Stelle $x = 2$ an.

2 c) Zeigen Sie, dass $F(b) = \int_3^b f(x) dx$ mit $b \in \mathbb{R}$ gilt.

Analysis

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ mit maximalem Definitionsbereich D.

3 a) Geben Sie D sowie die Nullstelle von f an und bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

4 b) Ermitteln Sie die x-Koordinate des Punkts, in dem der Graph von f eine waagrechte Tangente hat.

2 Geben Sie jeweils den Term und den Definitionsbereich einer Funktion an, die die angegebene(n) Eigenschaft(en) besitzt.

2 a) Der Punkt (2 | 0) ist ein Wendepunkt des Graphen von g.

2 b) Der Graph der Funktion h ist streng monoton fallend und rechtsgekrümmt.

3 Abbildung 1 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.

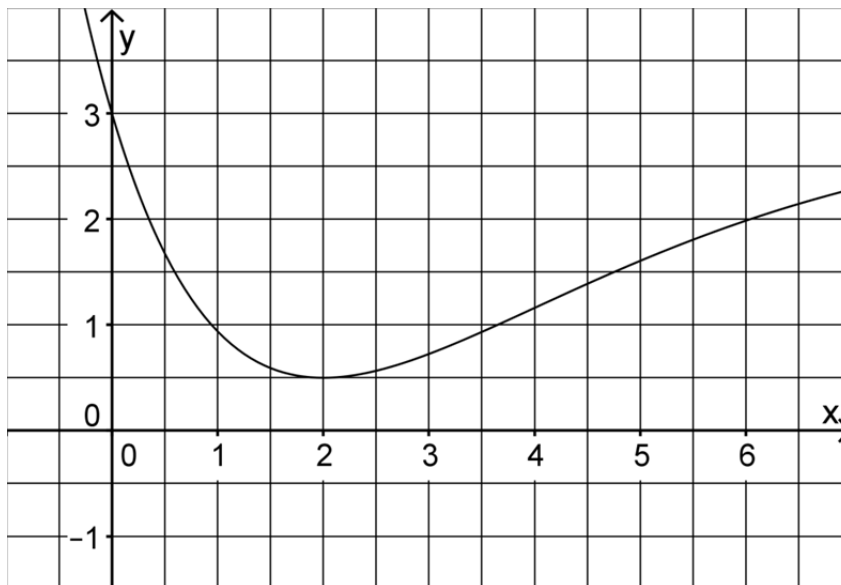


Abb. 1

(Fortsetzung nächste Seite)

- 2 a) Bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 1 einen Näherungswert für $\int_3^5 f(x) dx$.

Die Funktion F ist die in $\mathbb{R}$ definierte Stammfunktion von f mit $F(3) = 0$.

- 1 b) Geben Sie mithilfe von Abbildung 1 einen Näherungswert für die Ableitung von F an der Stelle $x = 2$ an.

- 2 c) Zeigen Sie, dass $F(b) = \int_3^b f(x) dx$ mit $b \in \mathbb{R}$ gilt.

- 4 4 Abbildung 2 zeigt den Graphen G_k einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion k . Skizzieren Sie in Abbildung 2 den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion k' . Berücksichtigen Sie dabei insbesondere einen Näherungswert für die Steigung des Graphen G_k an dessen Wendepunkt $(0 | -3)$ sowie die Nullstelle von k' .

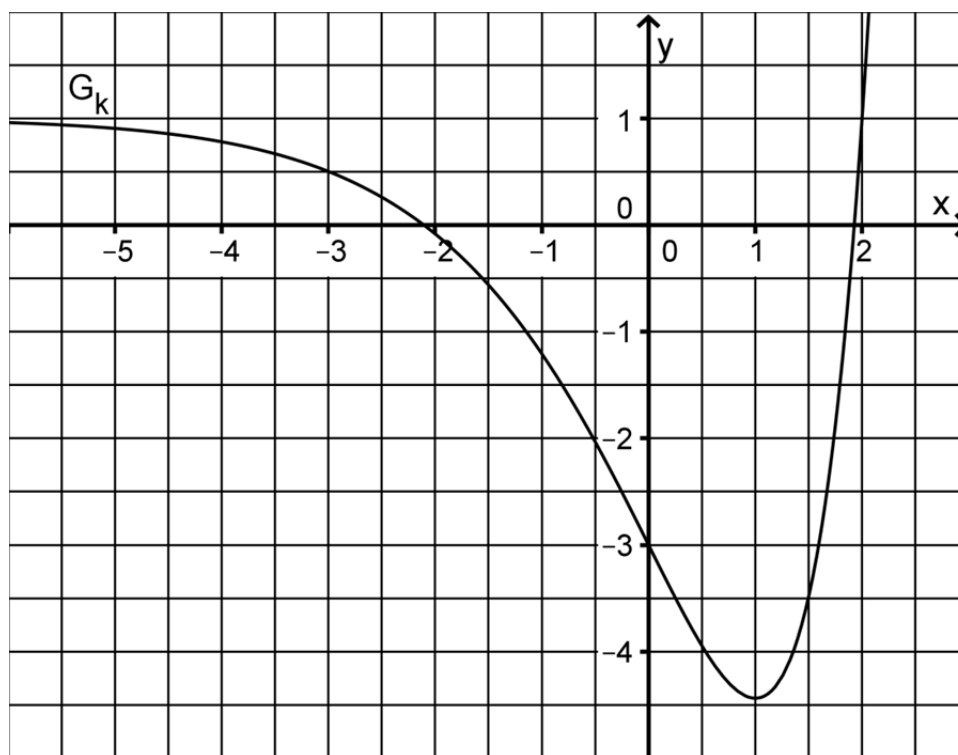


Abb. 2

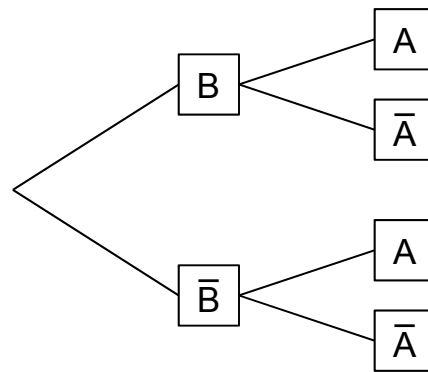
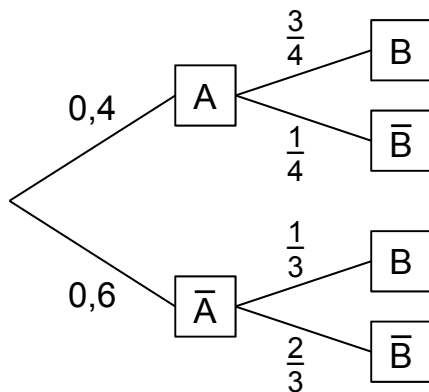
Stochastik

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

- 5 1 Die beiden Baumdiagramme gehören zum selben Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(B)$ und ergänzen Sie anschließend an allen Ästen des rechten Baumdiagramms die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.



(Teilergebnis: $P(B) = 0,5$)

- 2 2 Bei einem Zufallsexperiment wird eine ideale Münze so lange geworfen, bis zum zweiten Mal Zahl (Z) oder zum zweiten Mal Wappen (W) oben liegt. Als Ergebnismenge wird festgelegt: {ZZ; WW; ZWZ; ZWW; WZZ; WZW}.
- 2 a) Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment kein Laplace-Experiment ist.
- 3 b) Die Zufallsgröße X ordnet jedem Ergebnis die Anzahl der entsprechenden Münzwürfe zu. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

10

Stochastik

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Bei einem Zufallsexperiment wird eine ideale Münze so lange geworfen, bis zum zweiten Mal Zahl (Z) oder zum zweiten Mal Wappen (W) oben liegt. Als Ergebnismenge wird festgelegt: {ZZ; WW; ZWZ; ZWW; WZZ; WZW}.

2 **a)** Begründen Sie, dass dieses Zufallsexperiment kein Laplace-Experiment ist.

3 **b)** Die Zufallsgröße X ordnet jedem Ergebnis die Anzahl der entsprechenden Münzwürfe zu. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

2 An einem P-Seminar nehmen acht Mädchen und sechs Jungen teil, darunter Anna und Tobias. Für eine Präsentation wird per Los aus den Teilnehmerinnen und Teilnehmern ein Team aus vier Personen zusammengestellt.

3 **a)** Geben Sie zu jedem der folgenden Ereignisse einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses berechnet werden kann.

A: „Anna und Tobias gehören dem Team an.“

B: „Das Team besteht aus gleich vielen Mädchen und Jungen.“

2 **b)** Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den folgenden Term berechnet werden kann:

$$\frac{\binom{14}{4} - \binom{6}{4}}{\binom{14}{4}}$$

10

Geometrie

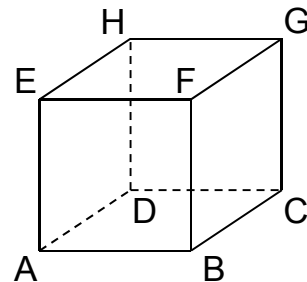
Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

- 1** Betrachtet wird der abgebildete Würfel ABCDEFGH.

Die Eckpunkte D, E, F und H dieses Würfels besitzen in einem kartesischen Koordinatensystem die folgenden Koordinaten: $D(0|0|-2)$, $E(2|0|0)$, $F(2|2|0)$ und $H(0|0|0)$.



- 2** a) Zeichnen Sie in die Abbildung die Koordinatenachsen ein und bezeichnen Sie diese. Geben Sie die Koordinaten des Punkts A an.
- 3** b) Der Punkt P liegt auf der Kante $[FB]$ des Würfels und hat vom Punkt H den Abstand 3. Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts P.
- 2** Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|4)$ und $B(-4|0|6)$.
- 2** a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts C so, dass gilt: $\overrightarrow{CA} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$.
- 3** b) Durch die Punkte A und B verläuft die Gerade g.
Betrachtet werden Geraden, für welche die Bedingungen I und II gelten:
- I Jede dieser Geraden schneidet die Gerade g orthogonal.
 - II Der Abstand jeder dieser Geraden vom Punkt A beträgt 3.
- Ermitteln Sie eine Gleichung für eine dieser Geraden.

Geometrie
Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

- 1** Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$ sowie die Punkte $P(1|0|2)$ und $Q(5|2|6)$.
- 2** **a)** Zeigen Sie, dass die Gerade durch die Punkte P und Q senkrecht zur Ebene E verläuft.
- 3** **b)** Die Punkte P und Q liegen symmetrisch zu einer Ebene F. Ermitteln Sie eine Gleichung von F.
- 2** Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|4)$ und $B(-4|0|6)$.
- 2** **a)** Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts C so, dass gilt: $\overrightarrow{CA} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$.
- 3** **b)** Durch die Punkte A und B verläuft die Gerade g.
Betrachtet werden Geraden, für welche die Bedingungen I und II gelten:
- I** Jede dieser Geraden schneidet die Gerade g orthogonal.
- II** Der Abstand jeder dieser Geraden vom Punkt A beträgt 3.
- Ermitteln Sie eine Gleichung für eine dieser Geraden.

10