Grundwissen Mathematik 9. Klasse

9.A Quadrieren und Radizieren

9.A.1 Definition der Quadratwurzel

Die **Quadratwurzel aus a** ist diejenige nicht negative Zahl, deren Quadrat a ergibt:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a\ ; \quad \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

Die Zahl (der Term) unter der Wurzel heißt **Radikand**, das Berechnen der Wurzel **Wurzelziehen** oder **Radizieren**.

Es gibt keine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl. (Der Radikand darf nicht negativ sein.)

9.A.2 Rationale, irrationale und reelle Zahlen

Jede **rationale Zahl** lässt sich als Bruch schreiben, der sich in einen Dezimalbruch umwandelt lässt.

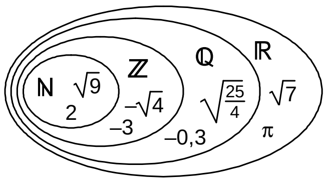
Die Dezimaldarstellung einer rationalen Zahl ist entweder

eine ganze Zahl		ein endlicher Dezimalbruch		ein unendlicher, periodischer Dezimalbruch.
	oder		*oder*	
$-\frac{3}{1} = -3$		$\frac{3}{10} = 0{,}3$		$\frac{1}{3} = 0{,}333... = 0{,}\overline{3}$

Jede Zahl mit einer Dezimaldarstellung, die unendlich und nicht periodisch ist, nennt man **irrationale Zahl**:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213...\ ; \quad \pi = 3{,}141592...\ ; \quad 0{,}101001000...$$

Zusammen mit den rationalen Zahlen bilden die irrationalen Zahlen die **Menge ℝ der reellen Zahlen**:



Natürliche Zahlen:	$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; ...\}$
Ganze Zahlen:	$\mathbb{Z} = \{...; -2; -1; 0; 1; 2; ...\}$
Rationale Zahlen:	$\mathbb{Q}$ = Menge aller Brüche
Reelle Zahlen:	$\mathbb{R}$ = Menge aller rat. und irr. Zahlen

9.A.3 Rechenregeln für das Rechnen mit Wurzeln

Wurzeln von Summen:

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Aber: $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

> Summanden dürfen **nicht** einzeln radiziert werden.

Wurzeln von Produkten und Produkte von Wurzeln:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

> Faktoren dürfen einzeln radiziert werden.

Wurzeln von Quotienten und Quotienten von Wurzeln:

$$\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

> Dividend u. Divisor dürfen einzeln radiziert werden.

9.A.4 Anwendungen der Rechenregeln

Teilweises Radizieren (partielles Wurzelziehen):

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Unter das Wurzelzeichen ziehen:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$$

Produkte von Wurzeln:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

Summen von Wurzeln (mit gleichem Radikanden):

$$2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (2+3) \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

Nenner rational machen:

$$\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

9.A.5 Binomische Formeln

Plusformel:	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Minusformel:	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Plusminusformel:	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$\textbf{Produktseite} \xrightarrow{\text{„Ausmultiplizieren"}} \textbf{Summenseite}$$

$$\textbf{Produktseite} \xleftarrow{\text{„Faktorisieren"}} \textbf{Summenseite}$$

9.A.6 Radizieren von Quadraten und von Summen

Für beliebige reelle Zahlen a gilt: $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$ (Betrag!)

$$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5\ ; \quad \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$$

Mit Hilfe der bin. Formeln lassen sich Summen in Produkte umwandeln. Wenn sich hierbei ein Radikand in ein Quadrat umformen lässt, kann radiziert werden:

$$\sqrt{x^2 + 6x + 9} = \sqrt{(x+3)^2} = |x+3| \quad \text{(Betrag notwendig!)}$$

$$\sqrt{4a^2 - 20a + 25} = \sqrt{(2a-5)^2} = |2a-5| \quad \text{(Betrag!)}$$

9.B Quadratische Gleichungen

9.B.1 Sonderfälle: reinquadratisch und ohne Konstante

Reinquadratische Gleichung („ohne Nur-x-Term"):

$$\begin{aligned} 3x^2 - 15 &= 0\ ; && \mid +15 \quad \mid :3 \\ x^2 &= 5\ ; && \mid \sqrt{...} \\ \sqrt{x^2} &= \sqrt{5}\ ; && \mid \text{Betrag!} \\ |x| &= \sqrt{5}\ ; && \mid \text{Betrag auflösen} \end{aligned}$$

$x = \sqrt{5}$ oder $x = -\sqrt{5}$

Quadratische Gleichung ohne additive Konstante („ohne c"):

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x &= 0\ ; && \mid \text{Faktorisieren (x ausklammern)} \\ x(2x-3) &= 0\ ; && \mid \text{Nullsetzen der Faktoren} \end{aligned}$$

$x = 0$ oder $2x - 3 = 0$ | Auflösen nach x

$x = 0$ oder $x = 1{,}5$

9.B.2 Allgemeine quadr. Gleichung − Lösungsformel

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \qquad \boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Beispiel: $2x^2 + 3x - 2 = 0\ ;\quad a = 2,\quad b = 3,\quad c = -2$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4}\ ;$$

$$x_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

9.B.3 Diskriminante und Anzahl der Lösungen

Die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

hängt von ihrer **Diskriminante** $\mathbf{D = b^2 - 4ac}$ ab:

Es gibt	zwei Lösungen,	genau dann wenn $D > 0$ ist,
	genau eine Lösung,	genau dann wenn $D = 0$ ist,
	keine Lösung,	genau dann wenn $D < 0$ ist.

9.C Quadratische Funktionen

9.C.1 Quadratfunktion und reinquadratische Funktion

Quadratfunktion: $y = x^2$

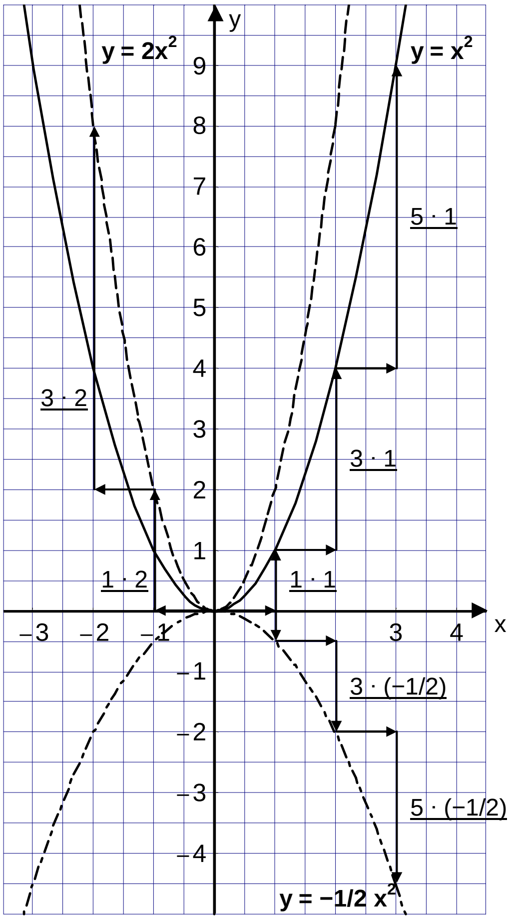
Graph: Nach oben geöffnete Normalparabel, Scheitel S im Ursprung.

Reinquadratische Funktionen: $y = ax^2 \quad (a \neq 0)$

Graph:
- Parabel mit dem Ursprung als Scheitel,
- für $a > 0$ nach oben geöffnet, für $a < 0$ nach unten geöffnet,
- für $|a| > 1$ schmaler als die Normalparabel, für $|a| < 1$ breiter als die Normalparabel.

Zeichnen von Parabeln:

Mit dem Scheitel beginnen,
vom Scheitel 1 nach rechts (bzw. links) und
$\underline{1 \cdot a}$ nach oben (oder unten),
von dort noch 1 nach rechts (bzw. links) und
$\underline{3 \cdot a}$ nach oben (oder unten),
von dort noch 1 nach rechts (bzw. links) und
$\underline{5 \cdot a}$ nach oben (oder unten) usw.



9.C.2 Allgemeine quadratische Funktion

$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$ NORMALFORM

Die zugehörige Parabel schneidet die y-Achse bei $y = c$.

$\boxed{y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}$ FAKTORISIERTE FORM

x_1 und x_2 sind die **Nullstellen** der quadratischen Funktion, die Schnittpunkte der zugehörigen Parabel mit der x-Achse.

Man erhält die Nullstellen aus der NORMALFORM, indem man den Funktionsterm gleich 0 setzt und die Lösungen der so entstandenen quadratischen Gleichung bestimmt.

Umwandlung FAKTORISIERTE FORM → NORMALFORM:
Ausmultiplizieren und zusammenfassen

$\boxed{y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S}$ SCHEITELFORM

Die zugehörige Parabel hat den Scheitel $S(x_S|y_S)$.

Scheitelbestimmung durch quadratische Ergänzung:

Beispiel: $y = -2x^2 + 8x - 2 =$ (NORMALFORM)

1. *Vorfaktor von x^2, d. h. a ausklammern:*
   $= -2\,[x^2 - 4x + 1] =$
2. *In der Klammer das Quadrat der Hälfte des Vorfaktors von x <u>addieren</u> und sofort wieder <u>subtrahieren</u>:*
   $= -2\,[x^2 - 4x \underline{+ 2^2} \underline{- 2^2} + 1] =$
3. *Binomische Formel anwenden und „Rest“ zusammenfassen:*
   $= -2\,[(x - 2)^2 - 3] =$
4. *Vorfaktor a in die Klammer „hineinmultiplizieren“:*
   $= -2\,(x - 2)^2 + 6$ (SCHEITELFORM)

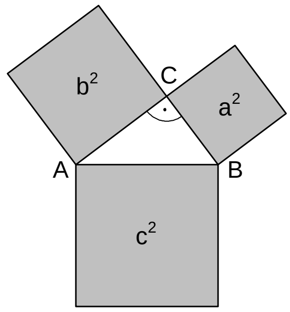
Hieraus: $S(2|6)$, $a = -2$ (→ Parabel zeichnen)

Umwandlung SCHEITELFORM → NORMALFORM:
Ausmultiplizieren und zusammenfassen

9.D Satzgruppe des Pythagoras

9.D.1 Satz des Pythagoras und wichtige Anwendungen

Bei einem rechtwinkligen Dreieck haben die Quadrate über den Katheten zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse:



$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

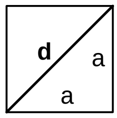
Wichtige Anwendungen:

- **Diagonale des Quadrats:**

$d^2 = a^2 + a^2$

$d^2 = 2a^2$

$\boxed{d = \sqrt{2}\,a}$

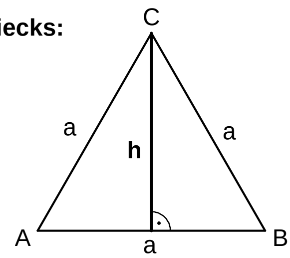


- **Höhe des gleichseitigen Dreiecks:**

$h^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = a^2$

$h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2$

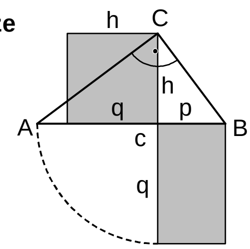
$\boxed{h = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a}$



9.D.2 Höhensatz und Kathetensätze

Höhensatz:

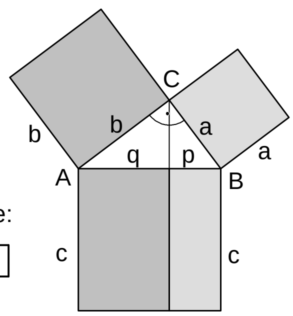
Bei einem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Höhe den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten:



$\boxed{h^2 = p \cdot q}$

Kathetensätze:

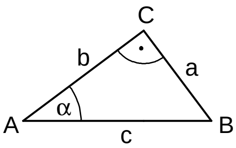
Bei einem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über einer Kathete den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus dem anliegenden Hypotenusenabschnitt und der Hypotenuse:



$\boxed{a^2 = p \cdot c}$ bzw. $\boxed{b^2 = q \cdot c}$

9.E Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

9.E.1 Definition von Tangens, Sinus und Kosinus



$\boxed{\text{Tangens} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}}$

$\tan\alpha = \frac{a}{b}$

$\boxed{\text{Sinus} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}}$ $\boxed{\text{Kosinus} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}}$

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$

9.E.2 Wichtige Formeln und besondere Werte

Komplemente: $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$; $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$

Trigonometrischer Pythagoras: $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

Tangens-Formel: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

α	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	0 $\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1 $\frac{1}{2}\sqrt{4}$
cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.

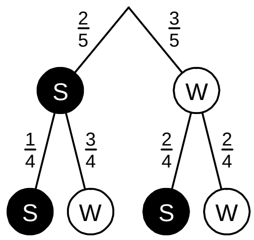
9.F Mehrstufige Zufallsexperimente

Pfadregeln:

1. Die Wahrscheinlichkeit eines **Ergebnisses** ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.
2. Die Wahrscheinlichkeit eines **Ereignisses** ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören.

Beispiel:

Aus einer Urne mit zwei schwarzen und drei weißen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln gezogen, ohne diese zurück zu legen.



Ergebnisraum:

$\Omega = \{SS, SW, WS, WW\}$

$P(SS) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{10}$ $P(WW) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

$P(„\text{verschieden}“) = P(SW) + P(WS) =$

$= \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$

9.G Die n-te Wurzel und Potenzgleichungen

9.G.1 Definition der n-ten Wurzel

Die **n-te Wurzel aus der nicht-negativen Zahl a** ist diejenige nicht-negative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt:

Man schreibt: $\sqrt[n]{a}$ Es gilt: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Potenzschreibweise: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

9.G.2 Potenzgleichungen

Die Gleichung $\mathbf{x^n = a}$ hat bei

	geradem Exponenten n	*ungeradem Exp. n*
für a > 0	zwei Lös. $x_{1,2} = \pm\sqrt[n]{a}$	eine Lös. $x = \sqrt[n]{a}$
für a = 0	eine Lös. $x = 0$	eine Lös. $x = 0$
für a < 0	keine Lösung	eine Lös. $x = -\sqrt[n]{\lvert a\rvert}$

9.H Rechnen mit Potenzen mit rat. Exp.

Definition: $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Summen und Differenzen von Potenzen:

Zusammenfassen, wenn Basis und Exponent gleich sind

$7a^{1/3} - a^{1/3} = (7-1)\,a^{1/3} = 6\,a^{1/3}$

Produkte u. Quotienten von Potenzen (gleicher Basis):

Exponenten addieren bzw. subtrahieren

$4^{1/3}\cdot 4^{1/6} = 4^{1/3+1/6} = 4^{1/2} = 2$

$4^{-1/3} : 4^{1/6} = 4^{-1/3-1/6} = 4^{-1/2} = \frac{1}{2}$

Potenzieren von Potenzen:

Exponenten multiplizieren

$(8^{-1/2})^{2/3} = 8^{-1/2\cdot 2/3} = 8^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$

Potenzieren von Summen und Differenzen:

Exponenten **nicht** verteilen

$(3^{1/2} + 3^{-1/2})^2 = 3 + 2\cdot 3^{1/2}\cdot 3^{-1/2} + 3^{-1} = 3 + 2 + \frac{1}{3} = 5\frac{1}{3}$

Potenzieren von Produkten und Quotienten:

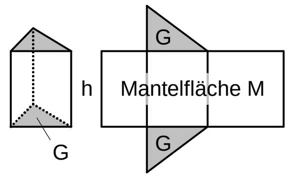
Exponenten verteilen

$(8\cdot 5)^{1/3} = 8^{1/3}\cdot 5^{1/3} = 2\,\sqrt[3]{5}$

$(3:4)^{3/2} = 3^{3/2} : 4^{3/2} = (3^3)^{1/2} : (4^{1/2})^3 = 27^{1/2} : 2^3 = \frac{\sqrt{27}}{8}$

9.J Prisma, Zylinder, Pyramide und Kegel

Prisma:



Volumen:

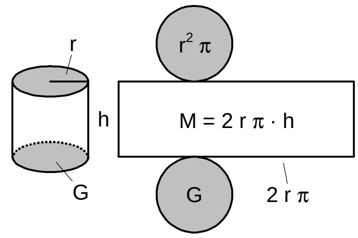
$V_{Prisma} = G\cdot h$

Oberfläche:

$O_{Prisma} = 2\cdot G + M =$

$= 2\cdot G + U_G\cdot h$

Zylinder:



Volumen:

$V_{Zylinder} = G\cdot h =$

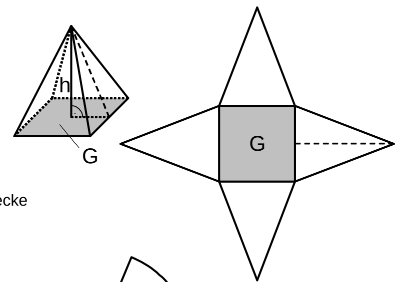
$= r^2\,\pi\cdot h$

Oberfläche:

$O_{Zylinder} = 2\cdot G + M =$

$= 2\cdot r^2\,\pi + 2\,r\,\pi\cdot h$

Pyramide:



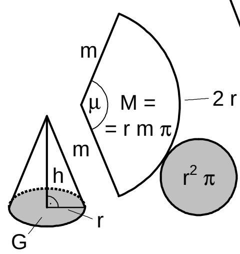
Volumen:

$V_{Pyramide} = \frac{1}{3}\,G\cdot h$

Oberfläche:

$O_{Pyramide} = G + A_{Dreiecke}$

Kegel:



Volumen:

$V_{Kegel} = \frac{1}{3}\,G\cdot h =$

$= \frac{1}{3}\,r^2\,\pi\cdot h$

Oberfläche:

$O_{Kegel} = G + M =$

$= r^2\,\pi + r\,m\,\pi$

Mittelpunktswinkel des Kreissektors (abgewickelter Mantel):

$\mu = \frac{r}{m}\cdot 360°$