Grundwissen M10

Standardaufgaben	Grundwissen M10	Beispielaufgaben

Standardaufgaben

A.1 Berechne den Volumeninhalt einer Kugel mit einem Oberflächeninhalt von 36π [FE].

Grundwissen M10

A.1 Die Kugel

Oberfläche: $O_{Kugel} = 4\pi r^2$

Volumen: $V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3$

Beispielaufgaben

Eine Kugel hat den Radius 2 LE.

Berechne den Oberflächeninhalt und den Volumeninhalt:

$O_{Kugel} = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi \approx 50 \text{ in [FE]}$

$V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3}\pi \approx 34 \text{ in [VE]}$

Standardaufgaben

Zeichne jeweils den Graphen der Funktion:

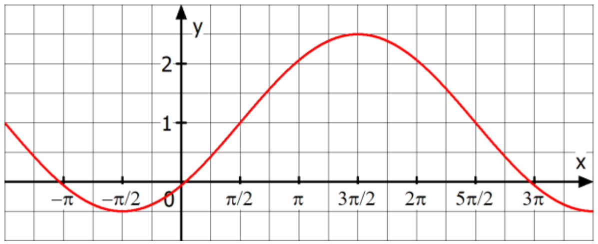
A.2.1 $f(x) = 2\cos(x) - 1$ rot

A.2.2 $f(x) = -\sin(0{,}5x)$ blau

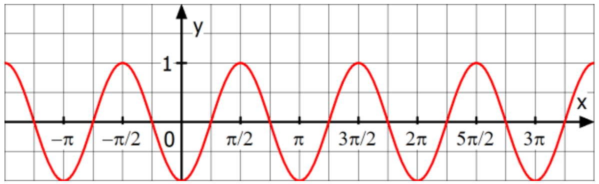
A.2.3 $f(x) = \sin\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)$ grün

Gib jeweils eine Funktionsgleichung zu den folgenden Graphen an:

A.2.4



A.2.5



Gib jeweils alle Lösungen im Intervall $[0; 2\pi[$ an:

A.2.6 $\sin x = 1$

A.2.7 $\sin x = 0{,}5$

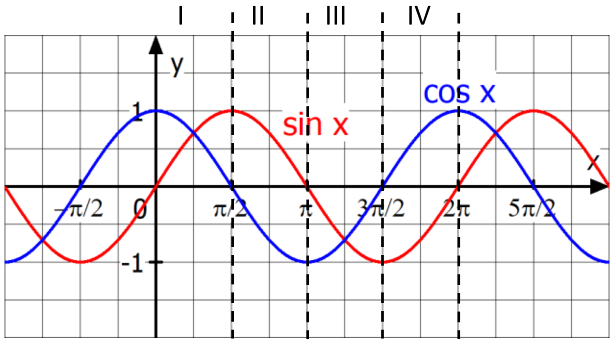
A.2.8 $\cos x = -0{,}5$

A.2.9 $\sin 2x = 0$

Grundwissen M10

A.2 Trigonometrische Funktionen

f(x) = sin x	**f(x) = cos x**
$D = \mathbb{R};\ W = [-1; 1]$	Periode $P = 2\pi$
Punktsymmetrie zum Ursprung (0|0) $\sin(-x) = -\sin x$	Achsensymmetrie zur y-Achse $\cos(-x) = \cos x$



	I	**II**	**III**	**IV**
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+

Die allgemeine Sinusfunktion

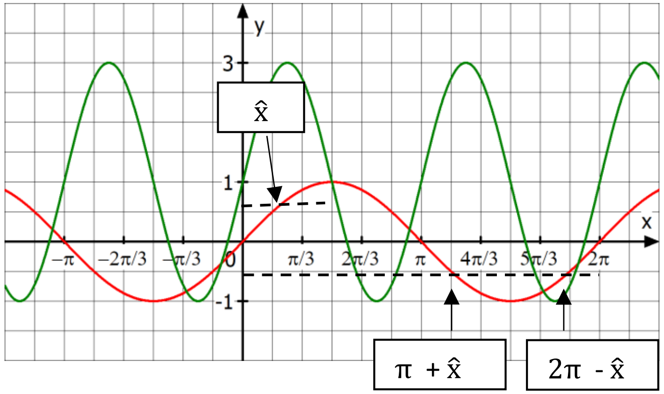
$y = a\sin\big(b(x - c)\big) + d$. Der Graph ist

1. mit dem Faktor $\frac{1}{|b|}$ in x-Richtung gestreckt
2. für b < 0 an der y-Achse gespiegelt
3. um $|c|$ nach links (c < 0)/rechts (c > 0) verschoben
4. mit dem Faktor |a| in y-Richtung gestreckt
5. bei negativen a an der x-Achse gespiegelt
6. um |d| nach oben (d > 0) / unten (d < 0) verschoben.

Die Amplitude ist |a|, die Periodenlänge $P = \frac{2\pi}{|b|}$.

Beispielaufgaben

Zeichne den Graphen zu $f(x) = 2\sin(2(x - \pi)) + 1$



Bestimme zu der Gleichung sin x = - 0,6 alle Lösungen

für $x \in [0; 2\pi[$ bzw. für $x \in \mathbb{R}$.

Äquivalente Aufgabe: Für welche Werte von x schneidet der Graph der Sinusfunktion die Parallele zur x-Achse mit der Gleichung y= - 0,6 ?

für $x \in [0; 2\pi[$:

Am Taschenrechner TR Bogenmaß (RAD) einstellen.

Beachte: Der TR liefert eine negative Lösung, die nicht im Intervall $[0; 2\pi[$ liegt.

$\sin \hat{x} = +0{,}6$ TR "$\sin^{-1}(0{,}6)$"

$\hat{x} \approx 0{,}64$ (zugehöriger Wert im I. Quadranten)

Der Graph der Sinusfunktion ist im dritten und vierten Quadranten negativ:

$x_1 = \pi + 0{,}64 \approx 3{,}78$ und $x_2 = 2\pi - 0{,}64 \approx 5{,}64$.

für $x \in \mathbb{R}$:

$x_1 = \pi + 0{,}64 \approx 3{,}78 + 2k\pi$ und $x_2 = 2\pi - 0{,}64 \approx 5{,}64 + 2k\pi$ (mit $k \in \mathbb{Z}$).

Bestimme zu der Gleichung cos x = - 0,6 alle Lösungen.

$\hat{x} \approx 0{,}93$

Der Graph der Kosinusfunktion ist im zweiten und dritten Quadranten negativ:

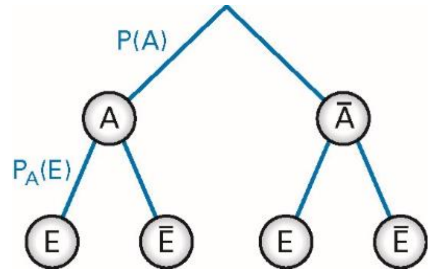
$x_1 = \pi - 0{,}93 \approx 2{,}21$ und $x_2 = \pi + 0{,}93 \approx 4{,}07$

B.1 Auf einer fernen Insel trat ein neues Virus auf. Man kann davon ausgehen, dass 2% aller Insulaner infiziert sind. Mit einem neu entwickelten Testverfahren weist man das Virus nach: Wenn eine Person infiziert ist, liefert der Test in 75% aller Fälle einen positiven Befund. Allerdings liefert er auch bei Gesunden in 10% aller Fälle einen positiven Befund.
K: Person ist infiziert B: Befund ist positiv

a) Erstelle ein Baumdiagramm und stelle zu 1000 Insulanern, die sich nach den Wahrscheinlichkeiten verteilen, eine Vierfeldertafel auf.
b) Max unterzieht sich dem Test und erhält einen positiven Befund.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er infiziert?
c) Eva erhält einen negativen Befund. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie trotzdem infiziert?

B Die bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition: $\mathbf{P_A(E)}$
ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von E unter der Bedingung, dass A bereits eingetreten ist.



P(A∩E)
Wahrscheinlichkeit, dass **A und E** eintreten

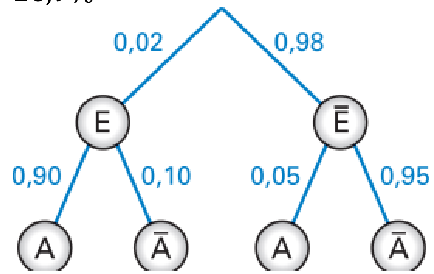
Es gilt:

$$P_A(E) = \frac{P(A\cap E)}{P(A)}$$

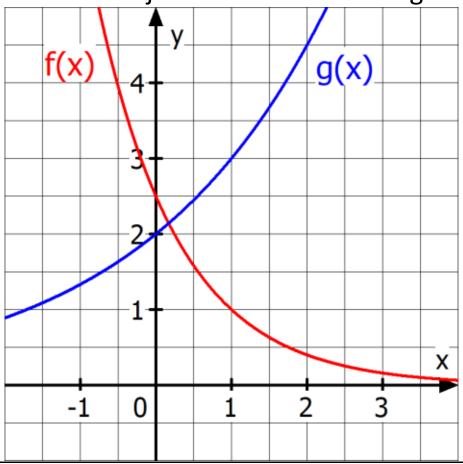
In einem Supermarkt wird in 2% aller Einkaufstage ein Diebstahlversuch (E) unternommen. In 90% **dieser Fälle** spricht die Alarmanlage an (A). Wenn kein Diebstahlversuch vorliegt, wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% trotzdem ein Alarm ausgelöst.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Diebstahl vorliegt, wenn die Alarmanlage Alarm gibt?

Gegeben: P(E) = 2%; $P_E(A)$ = 90%
Gesucht: $P_A(E)$
Lösung: $P_A(E) = \frac{P(A\cap E)}{P(A)} = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}90}{0{,}02\cdot 0{,}90+0{,}98\cdot 0{,}05} =$ 26,9%



Zeichne jeweils den Graphen der Funktion.
C.2.1 $f(x) = 3^x$
C.2.2 $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$
C.2.3 Gib jeweils eine Funktionsgleichung an.

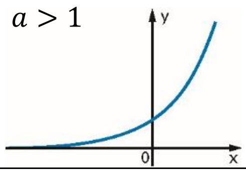


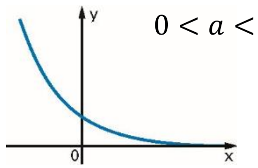
C.1 Die Exponentialfunktion

$$f(x) = b \cdot a^x \text{ mit } a > 0$$

Eigenschaften
- D = ℝ, W = $\mathbb{R}^+$
- Schnittpunkts mit der y-Achse : Y(0|b)
- waagrechte Asymptote: x-Achse
- mit wachsendem x nehmen die Funktionswerte für
  a < 1 ab (exponentielle Abnahme),
  a > 1 zu (exponentielle Zunahme).
- b heißt Startwert und
  a Wachstums- bzw. Abnahmefaktor

$a > 1$

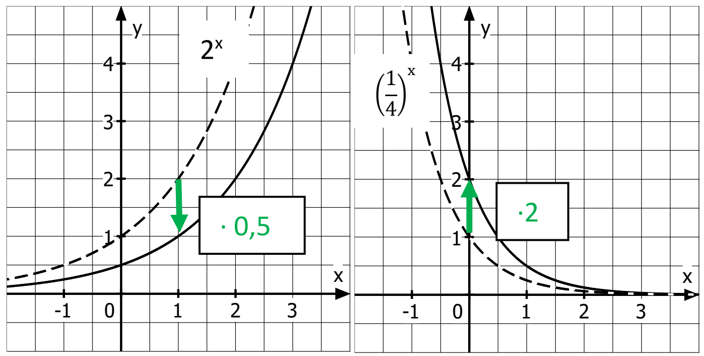




$0 < a < 1$

Zeichne jeweils den Graphen zu

$f(x) = 0{,}5 \cdot 2^x$ und $g(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$



Hinweis: Gestrichelt gezeichnet sind jeweils die Grundfunktionen 2^x und $\left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Löse die Exponentialgleichungen:

C.2.4 $2^x \cdot 3 = 9$

C.2.5 $3 \cdot 2^{x-1} = 24$

C.2.6 $1{,}5 \cdot 2^{\frac{x}{3}} = 15$

C.2 Der Logarithmus

Definition: Der Logarithmus von u zur Basis a (a > 0) ist diejenige Zahl r, mit der man a potenzieren muss, um u zu erhalten:

$$a^r = u \Leftrightarrow \log_a u = r$$

$$a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0 \text{ bzw. } a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$$

Rechenregeln:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$$

Löse die Exponentialgleichungen

a) $3^x = 5 \mid \lg$

$\lg 3^x = \lg 5$

$x \lg 3 = \lg 5 \mid : \lg 3$

$x = \frac{\lg 5}{\lg 3} = \log_3 5$

b) $2^{x+1} \cdot 3^x = 72$

$2 \cdot 2^x \cdot 3^x = 72 \mid : 2$

$(2 \cdot 3)^x = 36$

$x = \log_2 6^2 = 2$

Berechne jeweils den Grenzwert für $x \to \pm\infty$:

C.3.1 $f(x) = -\frac{3}{(x-3)^2}$

C.3.2 $f(x) = \frac{3x^2 - 5x^3}{2x^2 + 6x - 9}$

C.3.3 $f(x) = 3 + 2^x$

C.3.4 $f(x) = x^7 + 5x^3 2x^2 + x - 2$

C.3.5 $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + x - 2$

Gib, falls möglich, den Grenzwert für $x \to \pm\infty$ an:

C.3.6 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

C.3.7 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$

C.3.8 $f(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

C.3.9 $f(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x - 2$

C.3.10 $f(x) = \frac{x^2 - 2}{2x^2 + 6x - 4}$

C.3.11 $f(x) = \frac{x^2 - 2}{2x^3 + 6x - 4}$

C.3.12 $f(x) = \frac{x^3 - 2}{2x^2 + 6x - 4}$

C.3.13 $f(x) = x \cdot \cos x$

„Gib an“, d.h. Ergebnis genügt!

C.3 Verhalten im Unendlichen

Konvergenz:

Nähern sich die Funktionswerte f(x) für $x \to +\infty$ oder $-\infty$ einer Zahl a beliebig genau, so heißt a Grenzwert (Limes) der Funktion f.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a \text{ bzw. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

Divergenz:

Wachsen die Funktionswerte f(x) für $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$ unbegrenzt nach $+\infty$ bzw. $-\infty$, so sagt man die Funktion divergiert bestimmt.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ oder $-\infty$ bzw.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ oder $-\infty$

Ansonsten divergiert die Funktion unbestimmt.

Spezielle Grenzwerte (vgl. Graphen!!!)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{ und } \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty \text{ und } \lim_{x \to \infty} a^x = 0 \text{ (falls } a < 1) \ldots$$

Die höchste Potenz von x mit dem Vorzeichen ihres Koeffizienten entscheidet das Verhalten für $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$$

Ermittle folgende Grenzwerte:

a) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{5}{x-2} + 3\right) = 3$, denn: $\frac{5}{x-2}$ strebt für $x \to \infty$ gegen Null.

b) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(\frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(2 + \frac{6}{x} - \frac{9}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{6}{x} - \frac{9}{x^2}} = 0$

Ausklammern der höchsten Nennerpotenz: hier x^2

<u>Ganzrationale Funktionen</u> im Unendlichen

Die höchste Potenz mit ihrem Vorzeichen entscheidet das Verhalten für $x \to \pm\infty$:

c) $\lim_{x \to \infty} (x^7 + 5x^3 - 2x^2 - 8x^9 + x - 2) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} (x^7 + 5x^3 - 2x^2 - 2) = -\infty$

d) $\lim_{x \to \infty} \sin x$ und $\lim_{x \to -\infty} \sin x$ existieren nicht, denn der Graph von $\sin x$ schwankt für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ ständig zwischen -1 und +1 hin und her; die Funktion ist unbestimmt divergent.

Gib das Verhalten der ganzrationalen Funktion f für $x \to \pm\infty$ an. Ermittle die Nullstellen der Funktion und faktorisiere den Funktionsterm so weit wie möglich. Skizziere damit den groben Verlauf des Graphen.

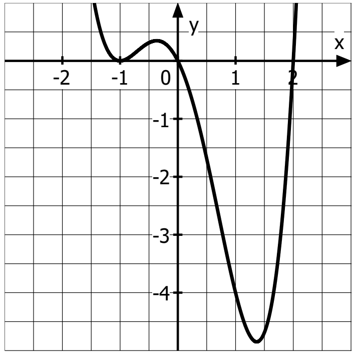
C.4.1 $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$

C.4.2 $f(x) = -x^3 + 4x$

C.4.3 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$

C.4.4 Bestimme zum abgebildeten Graph eine Gleichung der zugehörigen ganzrationalen Funktion.

Hinweis: $a_n = 1$



C.4 Ganzrationale Funktion

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

mit $a_n \neq 0$ heißt Polynom n-ten Grades.

Eine Funktion, die als Polynom geschrieben werden kann, nennt man ganzrationale Funktion:

f(x) = $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$

Eigenschaften:

Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades hat maximal n **Nullstellen**.

Für jede Nullstelle x_n gibt es den Linearfaktor $(x - x_n)$ bei der **Faktorisierung** des Polynoms (mit entsprechender Vielfachheit (= Exponent).

Ist die **Vielfachheit** einer Nullstelle ungerade, wechselt der Graph an der Nullstelle die Seite der x-Achse (NS mit Vorzeichenwechsel).

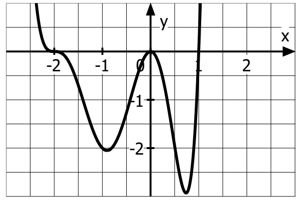
Ist die Vielfachheit gerade, wechselt der Graph die Seite nicht (NS ohne Vorzeichenwechsel).

Je größer die Vielfachheit der Nullstelle ist, desto mehr schmiegt sich der Graph in der Nähe der Nullstelle an die x-Achse an.

Gib das Verhalten der ganzrationalen Funktion f mit $f(x) = (x-1)x^2(x+2)^3$ für $x \to \pm\infty$ an. Ermittle die Nullstellen der Funktion und faktorisiere den Funktionsterm so weit wie möglich.

Skizziere damit den groben Verlauf des Graphen.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

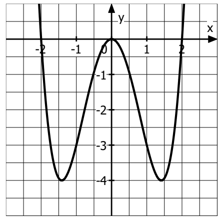


Da der Funktionsterm in der faktorisierten Form vorliegt, können hier die Nullstellen einfach abgelesen werden:

$x = 1$ (einfache NS mit VZW)

$x = 0$ (dopp. NS ohne VZW)

$x = -2$ (dreif. NS mit VZW)



Bestimme zum gegebenen Graphen eine Gleichung der zugehörigen ganzrationalen Funktion:

$f(x) = (x-2)(x+2)x^2$

Überprüfe auf (einfache) Symmetrie:

C.5.1 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

C.5.2 $f(x) = x \cdot \cos x + 1$

C.5.3 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

C.5 Symmetrie von Funktionsgraphen

Achsensymmetrie zur y-Achse

$$\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$$

Punktsymmetrie zum Ursprung

$$\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$$

Überprüfe $f(x) = x^3 - x$ auf (einfache) Symmetrie:

$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$

$\Rightarrow$ f(x) ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Beschreibe jeweils, wie der Graph der Funktion f(x) aus dem Graphen der entsprechenden Grundfunktion hervorgeht und gib ggf jeweils Definitionsmenge, Wertemenge, Gleichung aller Asymptoten und besondere Eigenschaften an.

C.6.1 $f(x) = -\frac{1}{(x+3)^2} + 1$

C.6.2 $f(x) = 3^{x-1}$

C.6.3 $f(x) = 1 + 3^{-x}$

C.6.4 $f(x) = 2 - 3^{0,5\cdot(x+2)}$

C.6.5 $f(x) = 3 \cdot \sin(4x) - 2$

C.6 Lineare Transformation von Funktionen

$$f(x) = a \cdot g\big(b(x-c)\big) + d$$

StreckenSspiegelnVerschieben

Der Graph ist

1. mit dem Faktor $\frac{1}{|b|}$ in x-Richtung gestreckt
2. für b < 0 an der y-Achse gespiegelt
3. um $|c|$ nach links (c < 0)/rechts (c > 0) verschoben
4. mit dem Faktor |a| in y-Richtung gestreckt
5. bei negativen a an der x-Achse gespiegelt
6. um |d| nach oben (d > 0)/ unten (d < 0) verschoben.

Beschreibe, wie der Graph der Funktion f(x) mit f(x) = $4 - \frac{2}{x-1}$ aus dem Graphen der Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ hervorgeht.

Der Graph ist um 1 nach rechts verschoben;
mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt,
an der x-Achse gespiegelt und
um 4 nach oben verschoben.

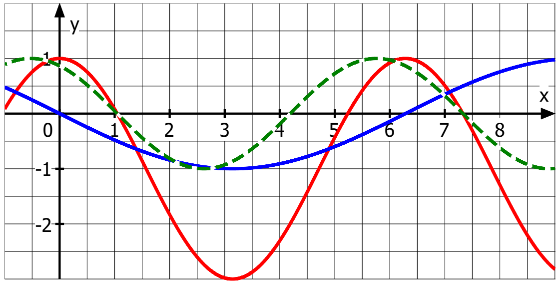
Ausklammern!

Der Graph von g mit g(x) = 3sin(2x+7) ist
mit Faktor 0,5 in x-Richtung gestreckt,
um 3,5 nach links verschoben und
mit Faktor 3 in y-Richtung gestreckt.

Ergebnisse zu GW 10

A.1 r = 3; V = 36π

A.2.1-3

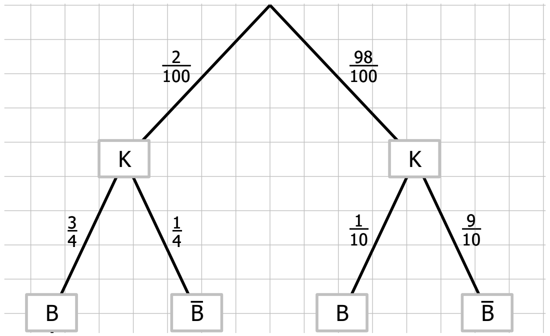


A.2.4 $f(x) = 1{,}5 \cdot \sin 0{,}5(x - \frac{\pi}{2}) + 1$

A.2.5 $f(x) = \sin 2(x - \frac{\pi}{4})$

A.2.6-9 $\frac{\pi}{2}$ / $\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$ / $\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$ / $0; \frac{\pi}{2}$

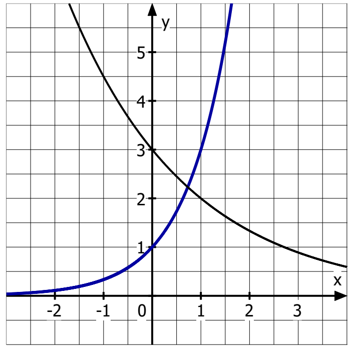
B.1 a)



	B	$\overline{B}$	
K	15	5	20
$\overline{K}$	98	882	980
	113	887	1000

b) $P_B(K) = 0{,}13$ c) $P_{\overline{B}}(K) = 0{,}56$

C.2.1-2



C.2.3 $f(x) = 2{,}5 \cdot 0{,}4^x$

$g(x) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$

C.2.4-6 $x = \log_2 3$

x = 4

$x = 3\log_2 10$

C.3.1-8

$x \to \infty$	0	$-\infty$	∞	∞	∞	0	2	∞	∞	0,5	0	∞	unb. div.
$x \to -\infty$	0	∞	3	$-\infty$	$-\infty$	∞	∞	0	-2	0,5	0	$-\infty$	unb. div.

C.4.1-4 f(x) = x²(x-3)(x-2) -x(x-2)(x+2) $\frac{1}{3}$x(x-3)(x+3) (x+1)²·x·(x-2)

C.5.1 und 5.3 achsensymmetrisch zur y-Achse C.5.2 keine

C.

6.1 $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ Verschiebung um 3 nach links; Spiegelung an der x-Achse; Verschiebung um 1 nach oben

6.2 $x \longmapsto 3^x$ Verschiebung um 1 nach rechts

6.3 $x \longmapsto 3^x$ Spiegelung an der y-Achse; Verschiebung um 1 nach oben

6.4 $x \longmapsto 3^x$ Streckung mit dem Faktor 2 in x-Richtung, Verschiebung um 2 nach links; Spiegelung an der x-Achse; Verschiebung um 1 nach oben

6.5 $x \longmapsto \sin x$ Streckung mit dem Faktor 0,25 in x-Richtung; Streckung mit dem Faktor 3 in y-Richtung; Verschiebung um 2 nach unten