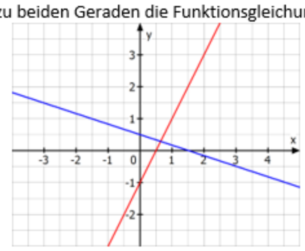
Grundwissen Funktionenlehre

Grundlagen für den schulinternen Leistungstest Anfang der 11. Klasse

- GW 8. Klasse:
  Lineare Funktionen und Bruchfunktionen

5. Geg.: Funktion $y = -1{,}5x + 2{,}5$
   a) Zeichne den Graph mit Hilfe eines Steigungsdreiecks und lege eine Wertetabelle für $x \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ an.
   b) Berechne die Schnittpunkte mit beiden Achsen!

6. Gib zu beiden Geraden die Funktionsgleichung an:



7. Bestimme die Gleichung der linearen Funktion, deren Graph durch die Punkte A$(-18/17)$ und B$(18/-13)$ geht.

A.2 Lineare Funktionen

Funktionsgleichung:

$$f(x) = mx + t$$

Steigung   y-Achsenabschnitt

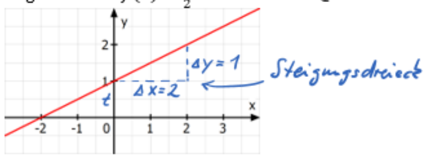
$$m = \frac{Höhenzuwachs}{waagrechte\ Veränderung}$$

Liegen $P(x_P/y_P)$ und $Q(x_Q/y_Q)$ auf der Geraden, so gilt:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$

Schnittpunkte mit den Achsen:
- $S_x(x_N/0)$ x_N heißt dann Nullstelle. Berechnung über $f(x_N) = 0$
- $S_y(0/t)$

Geg.: Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ mit $D = \mathbb{Q}$



Schnittpunkte mit den Achsen:

- Nullstelle $\frac{1}{2}x + 1 = 0 \Rightarrow x = -2$

$S_x(-2\,/\,0)$ und $S_y(0/1)$ y-Abschnitt

Geg.: $P(-3/4)$ und $Q(5/-2)$. Berechne die lineare Funktion, deren Graph durch P und Q geht.

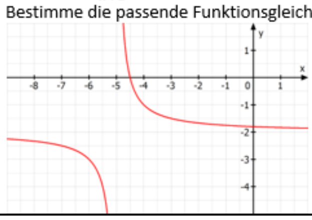
$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{-2-4}{5-(-3)} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

P_1 in $y = -\frac{3}{4}x + t$ einsetzen: $4 = -\frac{3}{4}(-3) + t$

$\Rightarrow t = 1\frac{3}{4}$ $\Rightarrow f(x) = -\frac{3}{4}x + 1\frac{3}{4}$

16. Gib zu den folgenden Funktionen die Definitionsmengen an und zeichne die Graphen mit Hilfe der Asymptoten in ein geeignetes KOS:
    a) $g(x) = \frac{1}{x-3} - 1{,}5$
    b) $h(x) = \frac{-1}{x+1} + 2$

17. Bestimme die passende Funktionsgleichung:



Allgemeine Bruchfunktionen (mit einer 1 im Zähler)

$f(x) = \frac{\pm 1}{x-a} + b$ mit $D = \mathbb{Q} \setminus \{a\}$

Der Graph ist eine **Hyperbel.**

Senkrechte Asymptote: x = a (**Definitionslücke,** Verschiebung nach rechts/links)

Waagrechte Asymptote: y = b (Verschiebung nach oben/unten)

Für **−1 im Zähler** gilt: **Spiegelung** an der waagrechten Asymptote (Graph liegt im II. und IV. Quadranten des Asymptotenkreuzes).

$f_1(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ Verschiebung um 1 nach oben

für $x = 2$ wird der Nenner 0 !

$\Rightarrow D = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ ⇒ waagr. Asy. y=1

⇒ senkr. Asymptote bei x=2.

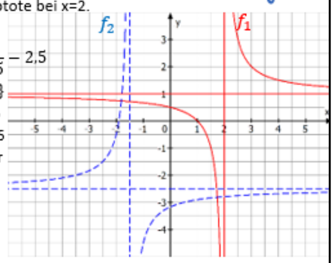
$f_2(x) = \frac{-1}{x+1{,}5} - 2{,}5$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{-1{,}5\}$

senkr. Asy. x=-1,5

waagr. Asy. y=-2,5

Spiegelung an der waagr. Asy.



- GW 9. Klasse:
  Quadratische Funktionen und Potenzfunktionen

6. Bestimme alle Lösungen der folgenden Gleichungen.
   a) $6x^2 = 5$
   b) $-2z^2 + \frac{3}{2}z = 0$
   c) $x^2 - 5x + 6 = 0$
   d) $x^2 - 6x = 27$

7. Bestimme die Anzahl der Lösungen folgender Gleichungen.
   a) $-5x^2 + 6x - 80 = 0$
   b) $5x^2 - 40x + 80 = 0$

B. Quadratische Gleichungen lösen

Reinquadr. Gleichung („ohne Nur-x-Term"): $x^2 + c = 0$
1. x^2 isolieren.
2. Wurzel ziehen; an den Betrag denken!
3. Betrag auflösen; an die zweite Lösung denken!

Quadr. Gleichung **ohne additive Konstante:** $ax^2 + bx = 0$
1. Faktorisieren (x ausklammern).
2. Jeden Faktor gleich Null setzen.
3. Jeweils nach x auflösen.

Allgemeine quadratische Gleichung: $ax^2 + bx + c = 0$

⇨ **Lösungsformel:** $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Die **Anzahl der Lösungen** einer quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$$

kann man an ihrer **Diskriminante** $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$ ablesen.

$D > 0 \Leftrightarrow$ *zwei Lösungen*
$D = 0 \Leftrightarrow$ *genau eine Lösung*
$D < 0 \Leftrightarrow$ *keine Lösung*

$\boldsymbol{3x^2 - 15 = 0}$ $|+15|:3$

① $x^2 = 5$ $|\sqrt{\ldots}$

② $\sqrt{x^2} = \sqrt{5}$

$|x| = \sqrt{5}$

③ $x_1 = \sqrt{5}; x_2 = -\sqrt{5}$

$\boldsymbol{2x^2 - 3x = 0}$

① $x(2x - 3) = 0$

② $x_1 = 0;$ $2x_2 - 3 = 0$

③ $x_1 = 0;$ $x_2 = 1{,}5$

$\boldsymbol{2x^2 + 3x - 2 = 0}$ $\Rightarrow a = 2; b = 3; c = -2$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{-3-5}{4} = -\frac{8}{4} = -2$$

$\boldsymbol{2x^2 + 3x - 2 = 0}$ $\Rightarrow a = 2; b = 3; c = -2$

$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25 > 0$

⇨ Die Gleichung hat zwei Lösungen (wie oben berechnet).

8. Bestimme die Nullstellenform und die Scheitelpunktform zu den gegebenen Normalformen.
   a) $y = x^2 - 3x - \frac{3}{4}$
   b) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 6x - 11$

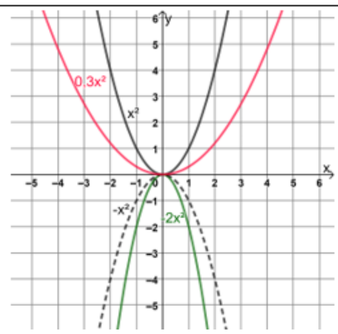
C. Quadratische Funktionen

Quadratfunktion: $y = x^2$

Graph: Nach oben geöffnete Normalparabel, Scheitel S im Ursprung

Reinquadratische Funktion: $y = ax^2 (a \neq 0)$

Graph:
- Parabel mit dem Scheitel S im Ursprung
- für $a > 0$ nach oben geöffnet
  für $a < 0$ nach unten geöffnet
- für $|a| > 1$ schmaler als die Normalparabel
  für $|a| < 1$ breiter als die Normalparabel



Grundwissen Funktionenlehre

Grundlagen für den schulinternen Leistungstest Anfang der 11. Klasse

Allgemeine quadratische Funktion

Normalform/Allgemeine Form: $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$

Die zugehörige Parabel schneidet die y-Achse bei $y = c$.

Nullstellenform/Faktorisierte Form: $\boldsymbol{y = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)}$

x_1 und x_2 sind die Nullstellen der Funktion (also die Schnittpunkte der zugehörigen Parabel mit der x-Achse).

Scheitelpunktform: $\boldsymbol{y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s}$

Die zugehörige Parabel hat den Scheitel $S(x_s|y_s)$, ist also gegenüber der Normalparabel um x_s nach rechts bzw. links und um y_s nach oben bzw. unten verschoben. Öffnungswinkel und -richtung sind am a abzulesen (vgl. „Reinquadratische Funktion").

$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}}$ (Normalform)

Normalform ⇨ Nullstellenform

Nullstellen bestimmen, z.B. mithilfe der Lösungsformel:

$a = \frac{1}{2}; b = -1; c = -\frac{3}{2}$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\frac{3}{2})}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1 \pm 2}{1}$$

$x_1 = 3; x_2 = -1$

⇨ Nullstellenform:

$y = \frac{1}{2} \cdot (x - 3) \cdot (x - (-1)) = \frac{1}{2} \cdot (x - 3) \cdot (x + 1)$

---

14. Gegeben ist die Potenzfunktion $f(x) = -3x^{17}$.

a) Beschreibe die Symmetrie und den charakteristischen Verlauf des zugehörigen Graphen G_f.

b) Gib die Wertemenge W und das Monotonieverhalten von f an.

15. Ziehe die Wurzel.

a) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$

b) $\sqrt[4]{0{,}0001}$

16. Löse folgende Potenzgleichungen.

a) $x^5 = 1$

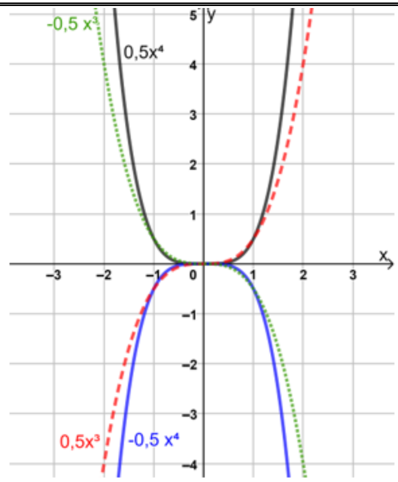
b) $x^3 = -27$

c) $x^6 = 64$

F. Potenzfunktionen mit nat. Exponenten, n-te Wurzel

F.1 Potenzfunktion $\boldsymbol{f(x) = a \cdot x^n}$ $(n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}\backslash 0)$

Der Exponent n gibt den **Grad der Potenzfunktion** an. Alle Graphen verlaufen durch die Punkte $O(0|0)$ und $P(1|a)$.



Bei geradem Exponenten n gilt:

- Die Graphen sind achsensymmetrisch zur y-Achse.
- Bei $a > 0$: Graph fällt monoton für $x < 0$
  Graph steigt monoton für $x > 0$
  „von links oben nach rechts oben"
  Wertemenge $W = \mathbb{R}_0^+$
- Bei $a < 0$: Graph steigt monoton für $x < 0$
  Graph fällt monoton für $x > 0$
  „von links unten nach rechts unten"
  Wertemenge $W = \mathbb{R}_0^-$

Bei ungeradem Exponenten n gilt:

- Die Graphen sind punktsymmetrisch zum Ursprung.
- Bei $a > 0$: Graph steigt monoton
  „von links unten nach rechts oben"
  Wertemenge $W = \mathbb{R}$
- Bei $a < 0$: Graph fällt monoton
  „von links oben nach rechts unten"
  Wertemenge $W = \mathbb{R}$

F.2 n-te Wurzel und Potenzgleichungen

Die **n-te Wurzel aus der nicht-negativen Zahl a** ist diejenige nicht-negative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt: $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$

Potenzschreibweise: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ Es gilt: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

$\sqrt[6]{1000000} = \sqrt[6]{10^6} = 10$

Die **Potenzgleichung $\boldsymbol{x^n = c}$** hat diese Lösungen:

	n gerade	*n ungerade*
für $c > 0$	$x_{1,2} = \pm\sqrt[n]{c}$	$x = \sqrt[n]{c}$
für $c = 0$	$x = 0$	$x = 0$
für $c < 0$	keine Lösung	$x = -\sqrt[n]{\lvert c \rvert}$

$\boldsymbol{x^4 = 81}$

$x_1 = \sqrt[4]{81} = 3; x_2 = -\sqrt[4]{81} = -3$

$\boldsymbol{x^5 = -32}$

$x = -\sqrt[5]{\lvert -32 \rvert} = -\sqrt[5]{32} = -2$

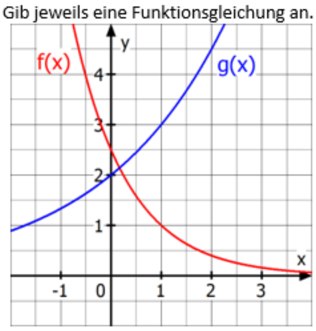
Grundwissen Funktionenlehre

Grundlagen für den schulinternen Leistungstest Anfang der 11. Klasse

- GW 10. Klasse:
  Exponentialfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktion und ganzrationale Funktionen

1. Zeichne jeweils den Graphen der Funktion.
   a) $f(x) = 3^x$
   b) $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$

2. Gib jeweils eine Funktionsgleichung an.



3. Löse die Exponentialgleichungen:
   a) $2^x \cdot 3 = 9$
   b) $3 \cdot 2^{x-1} = 24$
   c) $1{,}5 \cdot 2^{\frac{x}{3}} = 15$

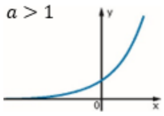
A. Exponentielles Wachstum und Logarithmus

A.1 Exponentialfunktion: $\mathbf{f(x) = b \cdot a^x}$ $(a > 0)$
mit Startwert b und Wachstumsfaktor (bzw. Abnahmefaktor) a

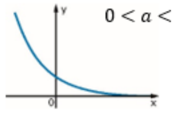
Eigenschaften

- $D = \mathbb{R}$
- $W = \mathbb{R}^+$ (für $b > 0$) bzw. $W = \mathbb{R}^-$ (für $b < 0$)
- Schnittpunkt mit der y-Achse bei $Y(0|b)$
- waagerechte Asymptote: x-Achse
- mit wachsendem x nehmen die Funktionswerte
  für $a > 1$ zu (exponentielle Zunahme),
  für $a < 1$ ab (exponentielle Abnahme).

$a > 1$



$0 < a < 1$



A.2 Exponentialgleichung und Logarithmus

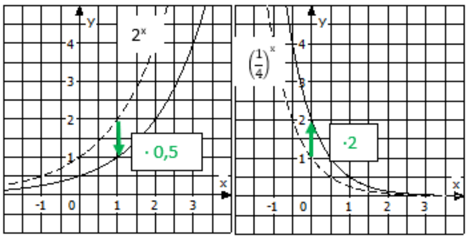
$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a(b)$$

Die **Exponentialgleichung** $\boldsymbol{a^x = b}$ $(a, b \in \mathbb{R}^+; a \neq 1;$ $x \in \mathbb{R})$ hat genau eine Lösung, die man als **Logarithmus von b zur Basis a** bezeichnet: $\boldsymbol{x = \log_a(b)}$.
Der Logarithmus von b zur Basis a ist also derjenige Exponent, mit dem die Basis a potenziert werden muss, um b zu erhalten. Es gilt:

- $a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a(1) = 0$
- $a^1 = a \Leftrightarrow \log_a(a) = 1$
- $\log_{10}(x) = \lg(x)$

Rechenregel: $\log_a(b^r) = r \cdot \log_a(b)$

Zeichne jeweils den Graphen zu
$f(x) = 0{,}5 \cdot 2^x$ und $g(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$



Hinweis: Gestrichelt gezeichnet sind jeweils die Grundfunktionen 2^x und $\left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Löse die Exponentialgleichungen.

$3^x = 5$
$x = \log_3(5)$

oder

$3^x = 5 \mid \lg$
$\lg(3^x) = \lg(5)$
$x \cdot \lg(3) = \lg(5) \mid : \lg(3)$
$x = \frac{\lg(5)}{\lg(3)} = \log_3(5)$

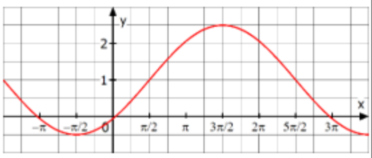
$2^{x+1} \cdot 3^x = 72$
$2^x \cdot 2 \cdot 3^x = 72 \mid : 2$
$(2 \cdot 3)^x = 36$
$6^x = 36$
$x = \log_6(36)$
$x = 2$

5. Gib jeweils alle Lösungen im Intervall $[0; 2\pi[$ an.
   a) $\sin x = 1$
   b) $\sin x = 0{,}5$
   c) $\cos x = -0{,}5$
   d) $\sin 2x = 0$

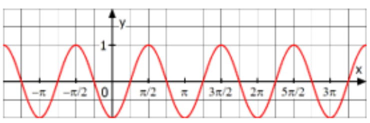
6. Zeichne jeweils den Graphen der Funktion.
   a) $f(x) = 2 \cdot \cos(x) - 1$ [rot]
   b) $f(x) = -\sin(0{,}5x)$ [blau]
   c) $f(x) = \sin\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)$ [grün]

7. Gib jeweils eine Funktionsgleichung zu den folgenden Graphen an.

a)



b)

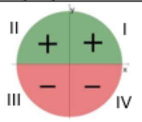
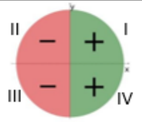


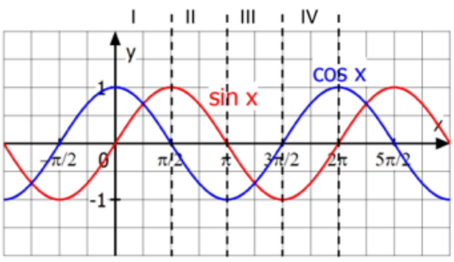
C. Sinus- und Kosinusfunktion

Gegeben ist ein Winkel α im Gradmaß. Sein **Bogenmaß** ist die zugehörige Maßzahl der Bogenlänge x am Einheitskreis. Für die Umrechnung gilt: $\frac{x}{\pi} = \frac{\alpha}{180°}$

Beachte: Beim Rechnen im Bogenmaß stelle den Taschenrechner (TR) auf RAD!

Trigonometrische Funktionen:

$\boldsymbol{f(x) = \sin x}$	$\boldsymbol{f(x) = \cos x}$
$D = \mathbb{R}$; $W = [-1; 1]$; Periode $P = 2\pi$	
Punktsymmetrie zum Ursprung $(0\|0)$ $\sin(-x) = -\sin x$	Achsensymmetrie zur y-Achse $\cos(-x) = \cos x$
	



Allgemeine Sinusfunktion $\boldsymbol{y = a \cdot \sin(b((x + c)) + d}$
mit Amplitude $|a|$ und Periodenlänge $P = \frac{2\pi}{|b|}$.

Ihr Graph entsteht aus dem Graphen von $\sin x$ durch...

1. Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{|b|}$
2. Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $|a|$
3. Spiegelung an der y-Achse, wenn $b < 0$
4. Spiegelung an der x-Achse, wenn $a < 0$
5. Verschieben um $|c|$ nach rechts $(c < 0)$/links $(c > 0)$
6. Verschieben um $|d|$ nach oben $(d > 0)$/unten $(d < 0)$.

*>>Reihenfolge beachten: **Strecken-Spiegeln-Verschieben!!**<<*

Geg.: $\alpha = 45°$; Ges.: Winkel im **Bogenmaß**

$$x = \frac{45°}{180°} \cdot \pi = \frac{1}{4}\pi = \frac{\pi}{4}$$

Bestimme alle Lösungen der Gleichung $\boldsymbol{\sin x = -0{,}6}$.

Äquivalente Aufgabe: Für welche Werte von x schneidet der Graph der Sinusfunktion die Parallele zur x-Achse mit der Gleichung $y = -0{,}6$?

für $x \in [0; 2\pi[$:

- $\sin x = -0{,}6$
  TR "$\sin^{-1}$(-0,6)" liefert negative Lösung, die nicht im Intervall $[0; 2\pi[$ liegt.
- zugehörigen Wert im I. Quadranten bestimmen:
  $\sin \hat{x} = +0{,}6$
  $\hat{x} \approx 0{,}64$
- Sinus ist im III. und IV. Quadranten negativ:
  $x_1 = \pi + 0{,}64 \approx 3{,}78$; $x_2 = 2\pi - 0{,}64 \approx 5{,}64$

für $x \in \mathbb{R}$:

$x_{1,k} = x_1 + 2k\pi = \pi + 0{,}64 + 2k\pi \approx 3{,}78 + 2k\pi$
$x_{2,k} = x_2 + 2k\pi = 2\pi - 0{,}64 + 2k\pi \approx 5{,}64 + 2k\pi$
(mit $k \in \mathbb{Z}$)

Bestimme alle Lösungen der Gleichung $\boldsymbol{\cos x = -0{,}6}$.

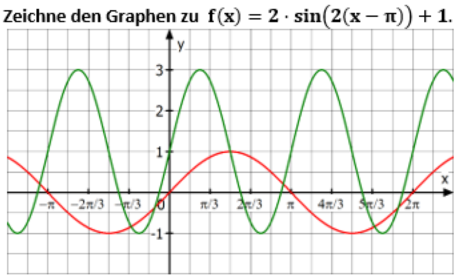
für $x \in [0; 2\pi[$:

- zugehöriger Wert im I. Quadranten:
  $\cos \hat{x} = +0{,}6 \rightarrow \hat{x} \approx 0{,}93$
- Kosinus ist im II. und III. Quadranten negativ:
  $x_1 = \pi - 0{,}93 \approx 2{,}21$; $x_2 = \pi + 0{,}93 \approx 4{,}07$

für $x \in \mathbb{R}$:

$x_{1,k} = x_1 + 2k\pi = \pi - 0{,}93 + 2k\pi \approx 2{,}21 + 2k\pi$
$x_{2,k} = x_2 + 2k\pi = \pi + 0{,}93 + 2k\pi \approx 4{,}07 + 2k\pi$
(mit $k \in \mathbb{Z}$)

Zeichne den Graphen zu $\boldsymbol{f(x) = 2 \cdot \sin(2(x - \pi)) + 1}$.



Grundwissen Funktionenlehre

Grundlagen für den schulinternen Leistungstest Anfang der 11. Klasse

8. Gib das Verhalten der ganzrationalen Funktion f für betragsmäßig große x-Werte an, ermittle die Nullstellen der Funktion und faktorisiere den Funktionsterm so weit wie möglich. Skizziere damit den groben Verlauf des Graphen.
   a) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$
   b) $f(x) = -x^3 + 4x$
   c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$
   d) $f(x) = -x^4 + 10x^2 - 9$

D. Ganzrationale Funktionen

sind Funktionen, die als Summen von Potenzfunktionen geschrieben werden können.

$f(x) = \underbrace{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0}_{\text{Polynom n-ten Grades}}$ mit $a_n \neq 0$

Faktorisierte Form:

$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})(x - x_n)$ mit $a_n \neq 0$

Nullstellen (Nst) bestimmt man durch Gleichsetzen der ganzrationalen Funktion mit Null ($f(x) = 0$) und bekannte Lösungsverfahren für Gleichungen (Ausklammern, Lösungsformel, Wurzelziehen etc.).

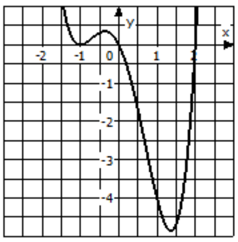
Aufgabe: Bestimme die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6$.

- Substituiere $x^2 = z$ (und demnach $x^4 = z^2$): $f(x) = z^2 - 5z + 6$
- Nullstellen des neuen Funktionsterms (mittels Lösungsformel): $z_1 = 2; z_2 = 3$
- Die Rücksubstitution ergibt zwei Gleichungen, die gelöst werden:

$x^2 = 2 \quad |\sqrt{\ldots}$ $\qquad$ $x^2 = 3 \quad |\sqrt{\ldots}$

$x_1 = \sqrt{2}; x_2 = -\sqrt{2}$ $\qquad$ $x_3 = \sqrt{3}; x_4 = -\sqrt{3}$

9. Bestimme zum abgebildeten Graphen eine Gleichung der zugehörigen ganzrationalen Funktion f. (Hinweis: $a_n = 1$)



10. Überprüfe auf Symmetrie.
    a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$
    b) $f(x) = -8x^2 + 8x$
    c) $f(x) = x \cdot \cos(x) + 1$

Eine **biquadratische Gleichung $a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = 0$** kann mithilfe einer **Substitution** auf eine quadratische Funktion zurückgeführt werden. Dabei wird x^2 durch z ersetzt ($x^2 = z; x^4 = z^2$).

Die **Vielfachheit einer Nullstelle** gibt an, wie oft der entsprechende Faktor in der faktorisierten Form der ganzrationalen Funktion enthalten ist.
Ist die Vielfachheit einer Nst

- ungerade, so wechselt der Graph an der Nst die Seite der x-Achse („Nst mit Vorzeichenwechsel“)
- gerade, so wechselt der Graph an der Nst die Seite der x-Achse nicht („Nst ohne Vorzeichenwechsel“)

Je größer die Vielfachheit der Nst ist, desto mehr schmiegt sich der Graph in der Nähe der Nullstelle an die x-Achse an.

Verhalten an den Rändern

Für betragsmäßig große x-Werte verläuft der Graph der ganzrationalen Funktion genauso wie die Potenzfunktion mit dem höchsten Exponenten, die im Polynom enthalten ist. (siehe Grundwissen 9. Klasse, F.1)

Symmetrie von Funktionsgraphen

Achsensymmetrie zur y-Achse $\Leftrightarrow \boldsymbol{f(-x) = f(x)}$
$\Leftrightarrow$ Funktion f „gerade“

Punktsymmetrie zum Ursprung $\Leftrightarrow \boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$
$\Leftrightarrow$ Funktion f „ungerade“

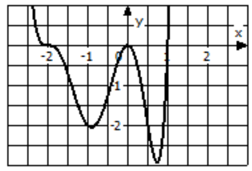
Ganzrationale Funktionen sind genau dann

- gerade, wenn alle vorkommenden Exponenten gerade sind,
- ungerade, wenn alle vorkommenden Exponenten ungerade sind.

Aufgabe:
Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = (x-1) \cdot x^2 \cdot (x+2)^3$. Ermittle die Nullstellen der Funktion, gib das Verhalten des Funktionsgraphen für betragsmäßig große x-Werte an und skizziere damit den groben Verlauf des Graphen.

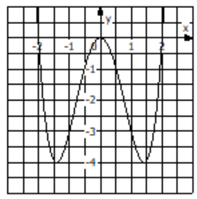
Funktionsterm ist bereits in faktorisierter Form gegeben
$\Rightarrow$ Nst können mit ihrer Vielfachheit direkt abgelesen werden
$x_1 = 1$ → einfache Nst mit Vorzeichenwechsel
$x_2 = 0$ → doppelte Nst ohne Vorzeichenwechsel
$x_3 = -2$ → dreifache Nst mit Vorzeichenwechsel

Ausmultiplizierte Form $f(x) = x^6 + 5x^5 + 6x^4 - 4x^3 - 8x^2$
→ Verhalten an den Rändern: „von links oben nach rechts oben“



Aufgabe:
Gib zum gegebenen Graphen eine Gleichung der zugehörigen Funktion.

$f(x) = (x+2)x^2(x-2)$



Aufgabe: Überprüfe $f(x) = x^3 - x$ auf Symmetrie.
$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$
$\Rightarrow f(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung
(auch zu erkennen an den ausschließlich ungeraden Exponenten)