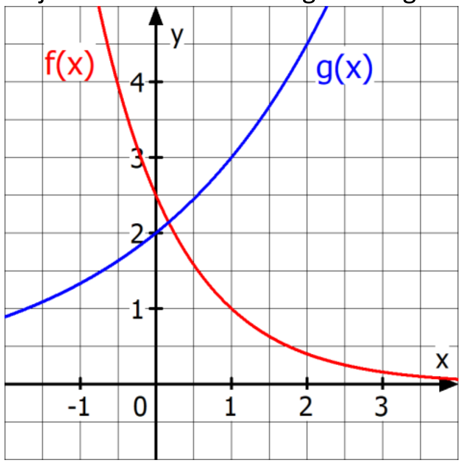
Standardaufgaben

1. Zeichne jeweils den Graphen der Funktion.
   a) $f(x) = 3^x$
   b) $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$

2. Gib jeweils eine Funktionsgleichung an.



3. Löse die Exponentialgleichungen:
   a) $2^x \cdot 3 = 9$
   b) $3 \cdot 2^{x-1} = 24$
   c) $1{,}5 \cdot 2^{\frac{x}{3}} = 15$

Grundwissen M10

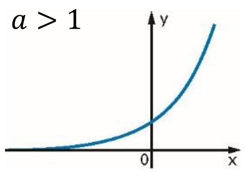
A. Exponentielles Wachstum und Logarithmus

A.1 Exponentialfunktion: $\mathbf{f(x) = b \cdot a^x}$ $(a > 0)$
mit Startwert b und Wachstumsfaktor (bzw. Abnahmefaktor) a

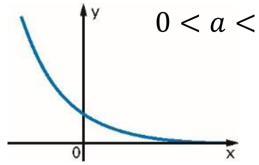
<u>Eigenschaften</u>

- $D = \mathbb{R}$
- $W = \mathbb{R}^+$ (für $b > 0$) bzw. $W = \mathbb{R}^-$ (für $b < 0$)
- Schnittpunkt mit der y-Achse bei $Y(0|b)$
- waagerechte Asymptote: x-Achse
- mit wachsendem x nehmen die Funktionswerte
  für a > 1 zu (exponentielle Zunahme),
  für a < 1 ab (exponentielle Abnahme).

$a > 1$



$0 < a < 1$



A.2 Exponentialgleichung und Logarithmus

$$a^x = b \iff x = \log_a(b)$$

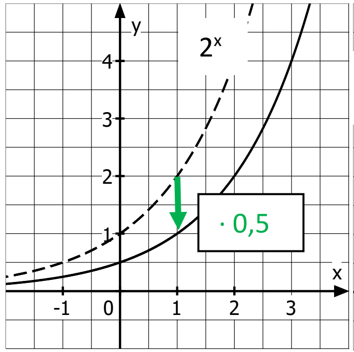
Die **Exponentialgleichung** $\boldsymbol{a^x = b}$ $(a, b \in \mathbb{R}^+; a \neq 1; x \in \mathbb{R})$ hat genau eine Lösung, die man als **Logarithmus von b zur Basis a** bezeichnet: $\boldsymbol{x = \log_a(b)}$.
Der Logarithmus von b zur Basis a ist also derjenige Exponent, mit dem die Basis a potenziert werden muss, um b zu erhalten. Es gilt:

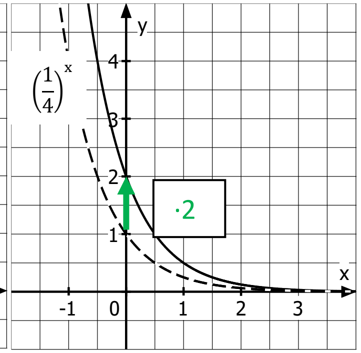
- $a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a(1) = 0$
- $a^1 = a \Leftrightarrow \log_a(a) = 1$
- $\log_{10}(x) = \lg(x)$

Rechenregel: $\log_a(b^r) = r \cdot \log_a(b)$

Beispielaufgaben

Zeichne jeweils den Graphen zu
$f(x) = 0{,}5 \cdot 2^x$ und $g(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$





Hinweis: Gestrichelt gezeichnet sind jeweils die Grundfunktionen 2^x und $\left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Löse die Exponentialgleichungen.

$3^x = 5$
$x = \log_3(5)$

oder

$3^x = 5 \mid \lg$
$\lg(3^x) = \lg(5)$
$x \cdot \lg(3) = \lg(5) \mid : \lg(3)$
$x = \frac{\lg(5)}{\lg(3)} = \log_3(5)$

$2^{x+1} \cdot 3^x = 72$
$2^x \cdot 2 \cdot 3^x = 72 \mid : 2$
$(2 \cdot 3)^x = 36$
$6^x = 36$
$x = \log_6(36)$
$x = 2$

4. Eine faire Münze (P(„Zahl“)=P(„Kopf“)=$\frac{1}{2}$) wird dreimal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse.
   a) Es erscheint genau zweimal Zahl.
   b) Der erste und der letzte Wurf sind Kopf.

B. Zusammengesetzte Zufallsexperimente und stochastische Simulationen

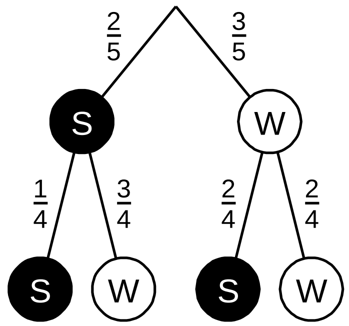
Ein **mehrstufiges Zufallsexperiment** besteht aus mehreren Teilexperimenten. Jedes Ergebnis stellt genau einen **Pfad** im zugehörigen **Baumdiagramm** dar und wird als **n-Tupel** $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ geschrieben.

Pfadregeln:
1. Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.
2. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören.

Simulation: Nachahmung eines Zufallsexperiments durch ein anderes mit gleichen Wahrscheinlichkeiten.

Aus einer Urne mit zwei schwarzen und drei weißen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln gezogen, ohne diese zurückzulegen.

Ergebnisraum:
$\Omega = \{SS; SW; WS; WW\}$



Bsp. zur 1. Pfadregel:
$P(SS) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$
$P(WW) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

Bsp. zur 2. Pfadregel:
P(„verschieden“)=
$= P(SW) + P(WS) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$

5. Gib jeweils alle Lösungen im Intervall $[0; 2\pi[$ an.
   a) $\sin x = 1$
   b) $\sin x = 0{,}5$
   c) $\cos x = -0{,}5$
   d) $\sin 2x = 0$

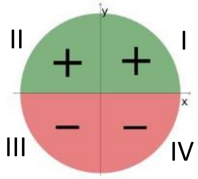
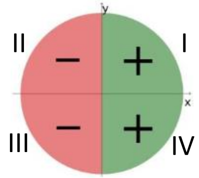
6. Zeichne jeweils den Graphen der Funktion.
   a) $f(x) = 2 \cdot \cos(x) - 1$ [rot]
   b) $f(x) = -\sin(0{,}5x)$ [blau]
   c) $f(x) = sin\,(-x + \frac{\pi}{3})$ [grün]

C. Sinus- und Kosinusfunktion

Gegeben ist ein Winkel α im Gradmaß. Sein **Bogenmaß** ist die zugehörige Maßzahl der Bogenlänge x am Einheitskreis. Für die Umrechnung gilt: $\frac{x}{\pi} = \frac{\alpha}{180°}$

Beachte: Beim Rechnen im Bogenmaß stelle den Taschenrechner (TR) auf RAD!

Trigonometrische Funktionen:

$\boldsymbol{f(x) = \sin x}$	$\boldsymbol{f(x) = \cos x}$
$D = \mathbb{R}$; $W = [-1; 1]$; Periode $P = 2\pi$	
Punktsymmetrie zum Ursprung (0|0) $\sin(-x) = -\sin x$	Achsensymmetrie zur y-Achse $\cos(-x) = \cos x$
	

Geg.: $\alpha = 45°$; Ges.: Winkel im **Bogenmaß**
$$x = \frac{45°}{180°} \cdot \pi = \frac{1}{4}\pi = \frac{\pi}{4}$$

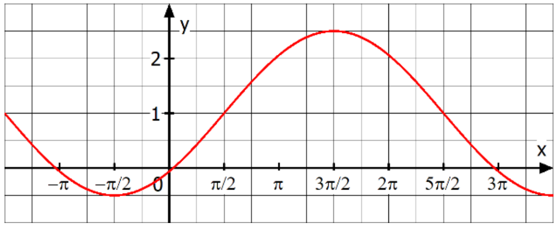
Bestimme alle Lösungen der Gleichung $\boldsymbol{\sin x = -0{,}6}$.
Äquivalente Aufgabe: Für welche Werte von x schneidet der Graph der Sinusfunktion die Parallele zur x-Achse mit der Gleichung $y = -0{,}6$?

für $x \in [0; 2\pi[$:
- $\sin x = -0{,}6$
  TR *"sin⁻¹(-0,6)"* liefert negative Lösung, die nicht im Intervall [0; 2π[liegt.
- zugehörigen Wert im I. Quadranten bestimmen:
  $$\sin \hat{x} = +0{,}6$$
  $$\hat{x} \approx 0{,}64$$
- Sinus ist im III. und IV. Quadranten negativ:
  $x_1 = \pi + 0{,}64 \approx 3{,}78$; $x_2 = 2\pi - 0{,}64 \approx 5{,}64$

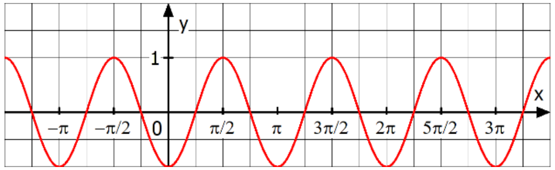
für $x \in \mathbb{R}$:
$x_{1,k} = x_1 + 2k\pi = \pi + 0{,}64 + 2k\pi \approx 3{,}78 + 2k\pi$
$x_{2,k} = x_2 + 2k\pi = 2\pi - 0{,}64 + 2k\pi \approx 5{,}64 + 2k\pi$
(mit $k \in \mathbb{Z}$)

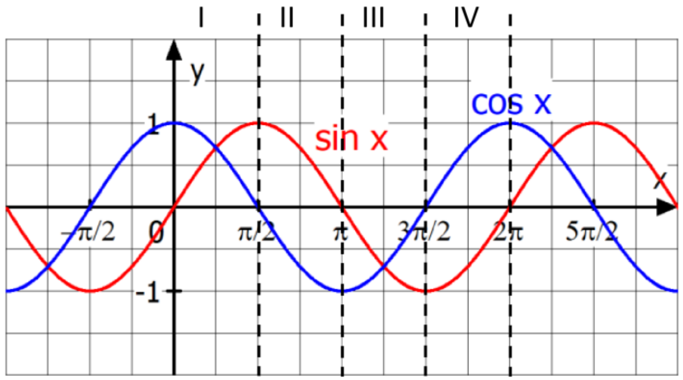
7. Gib jeweils eine Funktionsgleichung zu den folgenden Graphen an.

a)



b)





Allgemeine Sinusfunktion $y = a \cdot \sin(b((x + c)) + d$
mit Amplitude $|a|$ und Periodenlänge $P = \frac{2\pi}{|b|}$.

Ihr Graph entsteht aus dem Graphen von $\sin x$ durch...

1. Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{|b|}$
2. Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $|a|$
3. Spiegelung an der y-Achse, wenn $b < 0$
4. Spiegelung an der x-Achse, wenn $a < 0$
5. Verschieben um $|c|$ nach rechts ($c < 0$)/links ($c > 0$)
6. Verschieben um $|d|$ nach oben ($d > 0$)/unten ($d < 0$).

*>>Reihenfolge beachten: **S**trecken-**S**piegeln-**V**erschieben!!<<*

Bestimme alle Lösungen der Gleichung $\cos x = -0,6$.

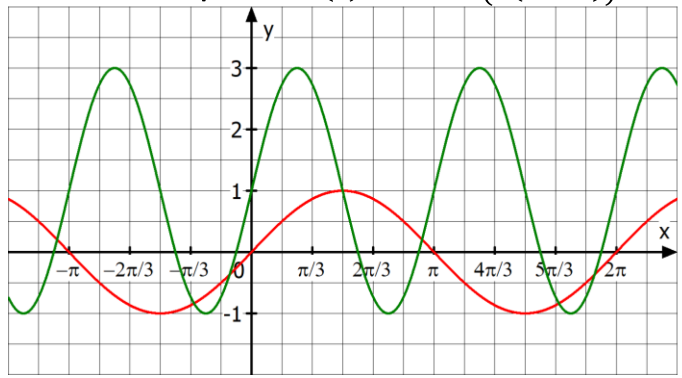
<u>für $x \in [0; 2\pi[$:</u>

- zugehöriger Wert im I. Quadranten:
  $\cos \hat{x} = +0,6 \rightarrow \hat{x} \approx 0,93$
- Kosinus ist im II. und III. Quadranten negativ:
  $x_1 = \pi - 0,93 \approx 2,21; x_2 = \pi + 0,93 \approx 4,07$

<u>für $x \in \mathbb{R}$:</u>

$x_{1,k} = x_1 + 2k\pi = \pi - 0,93 + 2k\pi \approx 2,21 + 2k\pi$
$x_{2,k} = x_2 + 2k\pi = \pi + 0,93 + 2k\pi \approx 4,07 + 2k\pi$
(mit $k \in \mathbb{Z}$)

Zeichne den Graphen zu $f(x) = 2 \cdot \sin(2(x - \pi)) + 1$.



8. Gib das Verhalten der ganzrationalen Funktion f für betragsmäßig große x-Werte an, ermittle die Nullstellen der Funktion und faktorisiere den Funktionsterm so weit wie möglich. Skizziere damit den groben Verlauf des Graphen.
   a) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$
   b) $f(x) = -x^3 + 4x$
   c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$
   d) $f(x) = -x^4 + 10x^2 - 9$

D. Ganzrationale Funktionen

sind Funktionen, die als Summen von Potenzfunktionen geschrieben werden können.

$f(x) = \underbrace{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0}_{\text{Polynom n-ten Grades}}$ mit $a_n \neq 0$

Faktorisierte Form:

$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})(x - x_n)$ mit $a_n \neq 0$

Nullstellen (Nst) bestimmt man durch Gleichsetzen der ganzrationalen Funktion mit Null ($f(x) = 0$) und bekannte Lösungsverfahren für Gleichungen (Ausklammern, Lösungsformel, Wurzelziehen etc.).

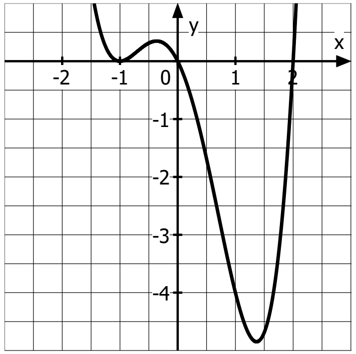
<u>Aufgabe</u>: Bestimme die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6$.

- Substituiere $x^2 = z$ (und demnach $x^4 = z^2$):
  $f(x) = z^2 - 5z + 6$
- Nullstellen des neuen Funktionsterms (mittels Lösungsformel): $z_1 = 2; z_2 = 3$
- Die Rücksubstitution ergibt zwei Gleichungen, die gelöst werden:

$x^2 = 2 \quad |\sqrt{\ldots}$ $\qquad$ $x^2 = 3 \quad |\sqrt{\ldots}$

$x_1 = \sqrt{2}; x_2 = -\sqrt{2}$ $\qquad$ $x_3 = \sqrt{3}; x_4 = -\sqrt{3}$

9. Bestimme zum abgebildeten Graphen eine Gleichung der zugehörigen ganzrationalen Funktion f. (Hinweis: $a_n = 1$)



10. Überprüfe auf Symmetrie.
    a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$
    b) $f(x) = -8x^2 + 8x$
    c) $f(x) = x^2 \cdot \cos(x) + 1$

Eine **biquadratische Gleichung** $\boldsymbol{a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = 0}$ kann mithilfe einer **Substitution** auf eine quadratische Funktion zurückgeführt werden. Dabei wird x^2 durch z ersetzt ($x^2 = z; x^4 = z^2$).

Die **Vielfachheit einer Nullstelle** gibt an, wie oft der entsprechende Faktor in der faktorisierten Form der ganzrationalen Funktion enthalten ist.
Ist die Vielfachheit einer Nst

- ungerade, so wechselt der Graph an der Nst die Seite der x-Achse („Nst mit Vorzeichenwechsel")
- gerade, so wechselt der Graph an der Nst die Seite der x-Achse nicht („Nst ohne Vorzeichenwechsel")

Je größer die Vielfachheit der Nst ist, desto mehr schmiegt sich der Graph in der Nähe der Nullstelle an die x-Achse an.

Verhalten an den Rändern
Für betragsmäßig große x-Werte verläuft der Graph der ganzrationalen Funktion genauso wie die Potenzfunktion mit dem höchsten Exponenten, die im Polynom enthalten ist. (siehe Grundwissen 9. Klasse, F.1)

Symmetrie von Funktionsgraphen
Achsensymmetrie zur y-Achse $\Leftrightarrow \boldsymbol{f(-x) = f(x)}$
$\Leftrightarrow$ Funktion f „gerade"
Punktsymmetrie zum Ursprung $\Leftrightarrow \boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$
$\Leftrightarrow$ Funktion f „ungerade"

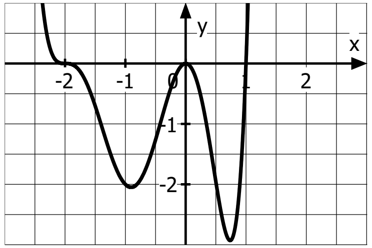
Ganzrationale Funktionen sind genau dann

- gerade, wenn alle vorkommenden Exponenten gerade sind,
- ungerade, wenn alle vorkommenden Exponenten ungerade sind.

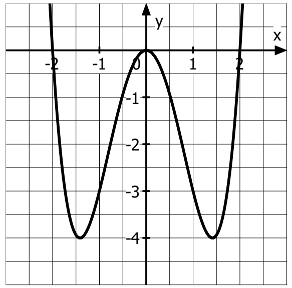
Aufgabe:
Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{(x-1)} \cdot \boldsymbol{x^2} \cdot \boldsymbol{(x+2)}^3$. Ermittle die Nullstellen der Funktion, gib das Verhalten des Funktionsgraphen für betragsmäßig große x-Werte an und skizziere damit den groben Verlauf des Graphen.

Funktionsterm ist bereits in faktorisierter Form gegeben
⇒ Nst können mit ihrer Vielfachheit direkt abgelesen werden
$x_1 = 1$ → einfache Nst mit Vorzeichenwechsel
$x_2 = 0$ → doppelte Nst ohne Vorzeichenwechsel
$x_3 = -2$ → dreifache Nst mit Vorzeichenwechsel

Ausmultiplizierte Form $f(x) = \boldsymbol{x^6} + 5x^2 + 6x^4 - 4x^3 - 8x^2$
→ Verhalten an den Rändern: „von links oben nach rechts oben"



Aufgabe:
Gib zum gegebenen Graphen eine Gleichung der zugehörigen Funktion.



$f(x) = (x+2)x^2(x-2)$

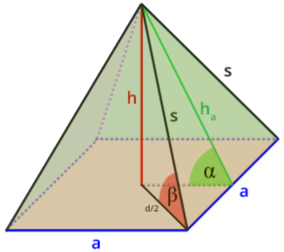
Aufgabe: Überprüfe $f(x) = x^3 - x$ auf Symmetrie.
$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$
⇒ $f(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung
(auch zu erkennen an den ausschließlich ungeraden Exponenten)

11. Eine gerade quadratische Pyramide ist 6 cm hoch und hat ein Volumen von 162 cm^3. Bestimme a, s, h_a, M, O, α und β.

12. Der Oberflächeninhalt eines geraden Kegels beträgt $24\pi\ dm^2$, der Kreis seiner Grundfläche hat den Radius 3 dm. Bestimme h, m, μ und V.

13. Berechne das Volumen einer Kugel mit einem Oberflächeninhalt von $36\pi\ m^2$.

E. Raumgeometrie



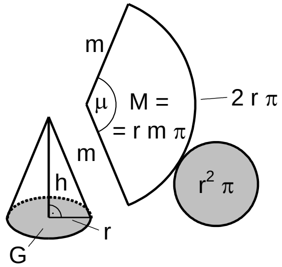
Pyramide

Oberfläche

$O_{Pyramide} = G + A_{Dreiecke}$

Volumen $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Kegel



Volumen

$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$

Oberfläche

$O_{Kegel} = G + M = \pi r^2 + \pi r m$

Mittelpunktswinkel des Kreissektors (abgewickelter Mantel): $\frac{\mu}{360°} = \frac{r}{m}$

Bei der **schiefen Pyramide** und dem **schiefen Kegel** liegt die Spitze nicht senkrecht über dem Mittelpunkt eines geraden Vielecks (vgl. **gerade Pyramide**) bzw. über dem Mittelpunkt des Kreises (vgl. **gerader Kegel**). Das Volumen lässt sich jeweils mit der gleichen Formel berechnen wie bei der geraden Pyramide bzw. dem geraden Kegel.

Kugel

Oberfläche $\quad \mathrm{O_{Kugel}} = 4\pi r^2$

Volumen $\quad \mathrm{V_{Kugel}} = \frac{4}{3}\pi r^3$

Eine gerade Pyramide ist 4 cm hoch und ihre quadratische Grundfläche hat die Kantenlänge 6 cm. Bestimme s, h_a, Mantelfläche M, O, V, α und β.

h_a: $\quad h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2 \Rightarrow h_a = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{7}\ cm$

M: $\quad M = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = 12\sqrt{7}\ cm^2 \approx 31{,}7\ cm^2$

O: $\quad O = G + M = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a \approx 67{,}7\ cm^2$

V: $\quad V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 48\ cm^3$

s: $\quad s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$\quad \Rightarrow s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \approx 5{,}8\ cm$

α: $\quad \tan\alpha = \frac{h}{\frac{a}{2}} \Rightarrow \alpha \approx 53{,}1°$

β: $\quad \tan\beta = \frac{h}{\frac{d}{2}} = \frac{h}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \beta \approx 43{,}3°$

Ein gerader Kegel ist 6 cm hoch, der Kreis seiner Grundfläche hat den Radius 8 cm. Bestimme m, μ, V und O.

m: $\quad m^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow m = \sqrt{r^2 + h^2} = 10\ cm$

μ: $\quad \mu = \frac{r}{m} \cdot 360° = 288°$

V: $\quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = 128\pi \approx 402{,}1\ cm^3$

O: $\quad O = \pi r^2 + \pi r m = 144\pi \approx 452{,}4\ cm^2$

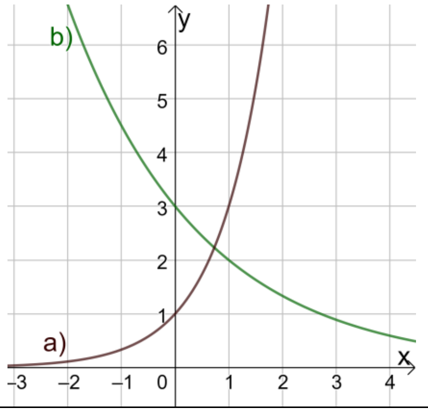
Eine Kugel hat den Radius 2 dm.
Berechne Oberflächeninhalt und Volumen.

$\mathrm{O_{Kugel}} = 4\pi \cdot (2\ \mathrm{dm})^2 = 16\pi\ \mathrm{dm}^2 \approx 50\ \mathrm{dm}^2$

$\mathrm{V_{Kugel}} = \frac{4}{3}\pi \cdot (2\ \mathrm{dm})^3 = \frac{32}{3}\pi\ \mathrm{dm}^3 \approx 34\ \mathrm{dm}^3$

Ergebnisse zu den Aufgaben

1.



2. $f(x) = 2{,}5 \cdot 0{,}4^x$

$g(x) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$

3. a) $x = \log_2(3)$
   b) $x = 4$
   c) $x = 3 \cdot \log_2(10)$

4. a) $A = \{ZZK; ZKZ; KZZ\}$

1. Pfadregel: $P(ZZK) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$;

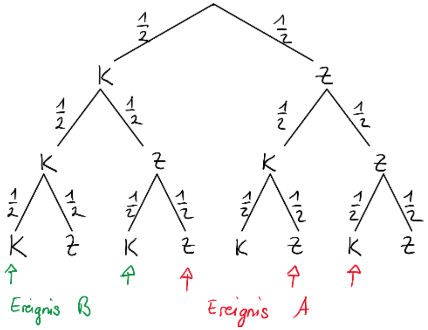
$P(ZKZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$;

$P(KZZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

2. Pfadregel: $P(A) =$

$= P(ZZK) + P(ZKZ) + P(KZZ) =$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 37{,}5\%$



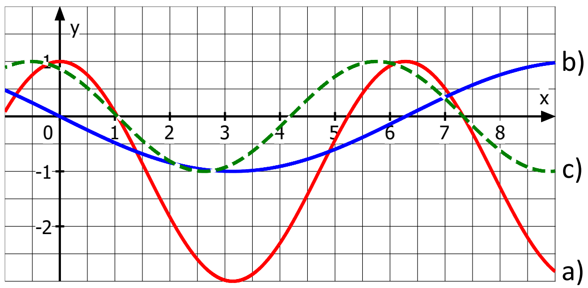
b) B= $\{KZK; KKK\}$

1. Pfadregel: $P(KZK) = P(KKK) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

2. Pfadregel: $P(B) = P(KZK) + P(KKK) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} = 25\%$

5. a) $x = \frac{\pi}{2}$; b) $x_1 = \frac{\pi}{6}$; $x_2 = \frac{5\pi}{6}$; c) $x_1 = \frac{2\pi}{3}$; $x_2 = \frac{4\pi}{3}$; d) $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{\pi}{2}$; $x_3 = \pi$; $x_4 = \frac{3\pi}{2}$

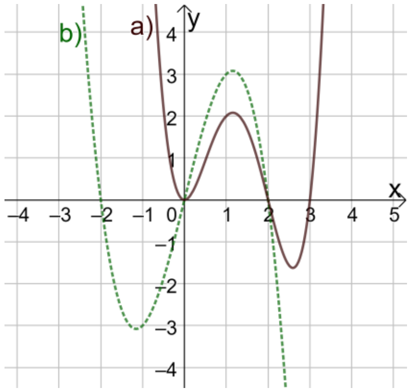
6.

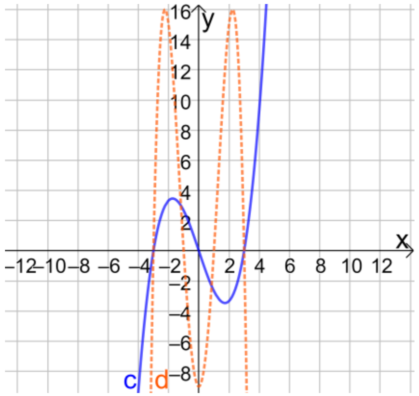


7. a) $f(x) = 1{,}5 \cdot \sin(0{,}5\left(x - \frac{\pi}{2}\right)) + 1$ b) $f(x) = \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

8.

	Verlauf	Nullstellen	Faktorisierte Form
a)	„von links oben nach rechts oben“	$x_1 = 0$ (2-fach) $x_2 = 2$ (1-fach) $x_3 = 3$ (1-fach)	$f(x) = x^2(x-2)(x-3)$
b)	„von links oben nach rechts unten“	$x_1 = 0$ (1-fach) $x_2 = 2$ (1-fach) $x_3 = -2$ (1-fach)	$f(x) = -x(x-2)(x+2)$
c)	„von links unten nach rechts oben“	$x_1 = 0$ (1-fach) $x_2 = 3$ (1-fach) $x_3 = -3$ (1-fach)	$f(x) = \frac{1}{3}x(x-3)(x+3)$
d)	„von links unten nach rechts unten“	$x_1 = 1$ (1-fach) $x_2 = -1$ (1-fach) $x_3 = 3$ (1-fach) $x_4 = -3$ (1-fach)	$f(x) = -(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$





9. $f(x) = (x+1)^2 \cdot x \cdot (x-2)$
10. a)+c) achsensymmetrisch zur y-Achse b) keine Symmetrie
11. $a = 9\,cm;\ s \approx 8{,}7\,cm;\ h_a = 7{,}5\,cm;\ M = 135\,cm^2;\ O = 216\,cm^2$; $\alpha \approx 53{,}1°; \beta \approx 43{,}3°$
12. $h = 4\,dm;\ m = 5\,dm;\ \mu = 216°; V \approx 37{,}7\,dm^3$
13. $r = 3\,m; V = 36\pi\,m^3 \approx 113{,}1\,m^3$