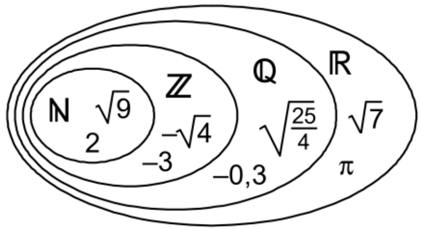
Standardaufgaben	Grundwissen M9	Beispiele
1. Bestimme die Quadratwurzel. a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt{1{,}21}$ c) $\sqrt{\frac{9}{25}}$ d) $\sqrt{0}$	**A. Reelle Zahlen: Quadrieren und Radizieren** **A.1 Definition der Quadratwurzel** Die **Quadratwurzel aus a** ist diejenige nicht negative Zahl, deren Quadrat a ergibt: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ Die Zahl (der Term) unter der Wurzel heißt **Radikand**, das Berechnen der Wurzel **Wurzelziehen** oder **Radizieren**. Es gibt keine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl. (Der Radikand darf nicht negativ sein.) Für beliebige reelle Zahlen a gilt: $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$ *(Betrag!)*	$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$ $\sqrt{3^2} = 3$ $\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$ $\sqrt{-16}$ existiert nicht, da der Radikand negativ ist. $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ $\sqrt{-3^2} = \sqrt{-9}$ existiert nicht, da der Radikand negativ ist. $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$ $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = \lvert -5 \rvert$
2. Gib an, welche der folgenden Zahlen zur Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen gehören und welche zur Menge $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ der irrationalen Zahlen gehören: $-\frac{6}{7}$; 0,23; 1,454545 ...; $\sqrt{7}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{\frac{4}{9}}$; π	**A.2 Rationale, irrationale und reelle Zahlen** Jede **rationale Zahl** lässt sich als Bruch schreiben, der im Zähler und im Nenner jeweils ganze Zahlen enthält und der sich in einen Dezimalbruch umwandelt lässt. Die Dezimaldarstellung einer rationalen Zahl ist entweder eine ganze Zahl $-\frac{3}{1} = -3$ *oder* ein endlicher Dezimalbruch $\frac{3}{10} = 0{,}3$ *oder* ein unendlicher, periodischer Dezimalbruch $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3}$ Eine Zahl, die nicht als Bruch mit jeweils ganzzahligem Zähler und Nenner darstellbar ist, nennt man **irrationale Zahl.** Ihre Dezimaldarstellung ist unendlich und nicht periodisch: $\sqrt{2}$ = 1,414213... ; π = 3,141592... ; 0,101001000... Die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die **Menge der reellen Zahlen** $\mathbb{R}$.	 Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$ Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ \ldots\}$ Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} =$ *Menge aller Brüche mit jeweils ganzzahligem Zähler und Nenner* Reelle Zahlen: $\mathbb{R} =$ *Menge aller rat. und irr. Zahlen*
3. Vereinfache (ohne Taschenrechner): a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ b) $\sqrt{6400}$ c) $\sqrt{25 - 9}$ d) $3\sqrt{7} - 10\sqrt{7}$	**A.3 Rechnen mit Quadratwurzeln** **Summe**: Summanden dürfen **nicht** einzeln radiziert werden. $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ **Produkt**: Faktoren dürfen einzeln radiziert werden. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ bzw. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ Aber: $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ $\sqrt{40000} = \sqrt{4 \cdot 10000} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10000} = 2 \cdot 100 = 200$

<table>
<tr>
<td>
e) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$
f) $\sqrt{28}$
</td>
<td>
Quotient: Dividend u. Divisor dürfen einzeln radiziert werden.
$\sqrt{a:b} = \sqrt{a}:\sqrt{b}$ bzw. $\sqrt{a}:\sqrt{b} = \sqrt{a:b}$
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ bzw. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

Teilweise Radizieren:
$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
Unter die Wurzel ziehen:
$5\sqrt{3} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$
Summe von Wurzeln (mit gleichem Radikanden):
$2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{2} = (2+3) \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
</td>
<td>
$\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{45}{5}} = \sqrt{9} = 3$
</td>
</tr>
<tr>
<td>
4. Ziehe die Wurzel.
a) $\sqrt{x^2 + 6x + 9}$
b) $\sqrt{s^2 - 6st + 9t^2}$

5. Mache den Nenner rational.
a) $\frac{2}{\sqrt{7}}$
b) $\frac{1-\sqrt{6}}{5\sqrt{6}}$
c) $\frac{4}{\sqrt{8}+\sqrt{10}}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1}$
</td>
<td>
A.4 Termumformungen bei Wurzeltermen
Binomische Formeln:
1. Plusformel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Minusformel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. Plusminusformel: $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$
Wurzelziehen mit binomischen Formeln:
Radikanden mithilfe der Plus- oder Minusformel faktorisieren.
$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = \sqrt{(a+b)^2} = |a+b|$
$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \sqrt{(a-b)^2} = |a-b|$

Nenner rational machen:
1. Term mit der Wurzel des Nenners erweitern.
$\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$
2. Plusminusformel verwenden, wenn der Nenner eine Summe oder Differenz mit Wurzel(n) ist.
$\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3} \cdot (1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5}) \cdot (1-\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{3} \cdot (1-\sqrt{5})}{1^2 - \sqrt{5}^2} =$
$= \frac{\sqrt{3} \cdot (1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{\sqrt{3} \cdot (1-\sqrt{5})}{-4}$
</td>
<td>
Ausmultiplizieren, hier mithilfe der Minusformel:
$(x-5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$

Faktorisieren (=Summe in ein Produkt umformen), hier mithilfe der Plusformel:
$y^2 + 4y + 4 = y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 = (y+2)^2$

$\sqrt{y^2 + 4y + 4} = \sqrt{(y+2)^2} = |y+2|$
$\sqrt{4a^2 - 20a + 25} = \sqrt{(2a-5)^2} = |2a-5|$
(An die Betragsstriche denken!)

$\frac{1+\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+3}{5 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}+3}{15}$

$\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot (\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7}-\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{7}+\sqrt{2})} = \frac{5 \cdot (\sqrt{7}+\sqrt{2})}{\sqrt{7}^2 - \sqrt{2}^2} =$
$= \frac{5 \cdot (\sqrt{7}+\sqrt{2})}{7-2} = \frac{5 \cdot (\sqrt{7}+\sqrt{2})}{5} = \sqrt{7} + \sqrt{2}$
</td>
</tr>
</table>

6. Bestimme alle Lösungen der folgenden Gleichungen.
   a) $6x^2 = 5$
   b) $-2z^2 + \frac{3}{2}z = 0$
   c) $x^2 - 5x + 6 = 0$
   d) $x^2 - 6x = 27$

7. Bestimme die Anzahl der Lösungen folgender Gleichungen.
   a) $-5x^2 + 6x - 80 = 0$
   b) $5x^2 - 40x + 80 = 0$

B. Quadratische Gleichungen lösen

Reinquadr. Gleichung („ohne Nur-x-Term“): $x^2 + c = 0$

1. x^2 isolieren.
2. Wurzel ziehen; an den Betrag denken!
3. Betrag auflösen; an die zweite Lösung denken!

$$\mathbf{3x^2 - 15 = 0} \quad |+15|:3$$

① $x^2 = 5 \quad |\sqrt{\ldots}$

② $\sqrt{x^2} = \sqrt{5}$

$|x| = \sqrt{5}$

③ $x_1 = \sqrt{5}; x_2 = -\sqrt{5}$

Quadr. Gleichung **ohne additive Konstante:** $ax^2 + bx = 0$

1. Faktorisieren (x ausklammern).
2. Jeden Faktor gleich Null setzen.
3. Jeweils nach x auflösen.

$$\mathbf{2x^2 - 3x = 0}$$

① $x(2x - 3) = 0$

② $x_1 = 0; \qquad 2x_2 - 3 = 0$

③ $x_1 = 0; \qquad x_2 = 1{,}5$

Allgemeine quadratische Gleichung: $ax^2 + bx + c = 0$

⇨ **Lösungsformel:** $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$\mathbf{2x^2 + 3x - 2 = 0}$ ⇨ $a = 2; b = 3; c = -2$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{-3 - 5}{4} = -\frac{8}{4} = -2$$

Die **Anzahl der Lösungen** einer quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$$

kann man an ihrer **Diskriminante** $\boldsymbol{D = b^2 - 4ac}$ ablesen.

$D > 0 \Leftrightarrow$ *zwei Lösungen*
$D = 0 \Leftrightarrow$ *genau eine Lösung*
$D < 0 \Leftrightarrow$ *keine Lösung*

$\mathbf{2x^2 + 3x - 2 = 0}$ ⇨ $a = 2; b = 3; c = -2$

$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25 > 0$

⇨ Die Gleichung hat zwei Lösungen (wie oben berechnet).

8. Bestimme die Nullstellenform und die Scheitelpunktform zu den gegebenen Normalformen.
   a) $y = x^2 - 3x - \frac{3}{4}$
   b) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 6x - 11$

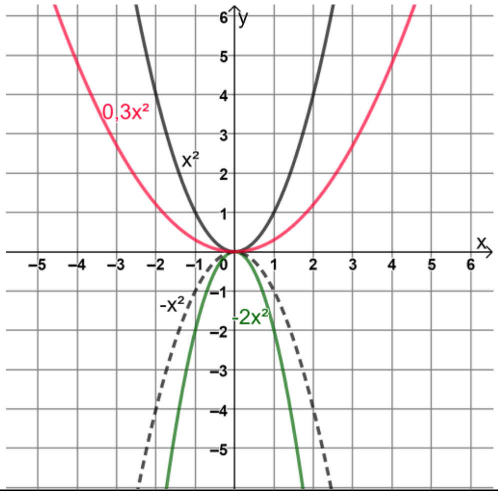
C. Quadratische Funktionen

Quadratfunktion: $y = x^2$

Graph: Nach oben geöffnete Normalparabel, Scheitel S im Ursprung

Reinquadratische Funktion: $y = ax^2 (a \neq 0)$

Graph:
- Parabel mit dem Scheitel S im Ursprung
- für $a > 0$ nach oben geöffnet
  für $a < 0$ nach unten geöffnet
- für $|a| > 1$ schmaler als die Normalparabel
  für $|a| < 1$ breiter als die Normalparabel



Allgemeine quadratische Funktion

Normalform/Allgemeine Form: $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$

Die zugehörige Parabel schneidet die y-Achse bei $y = c$.

Nullstellenform/Faktorisierte Form: $\boldsymbol{y = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)}$

x_1 und x_2 sind die Nullstellen der Funktion (also die Schnittpunkte der zugehörigen Parabel mit der x-Achse).

Scheitelpunktform: $\boldsymbol{y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s}$

Die zugehörige Parabel hat den Scheitel $S(x_s|y_s)$, ist also gegenüber der Normalparabel um x_s nach rechts bzw. links und um y_s nach oben bzw. unten verschoben. Öffnungswinkel und -richtung sind am a abzulesen (vgl. „Reinquadratische Funktion“).

Wechsel zwischen den verschiedenen Formen

Normalform ⇨ Nullstellenform

Funktionsterm gleich Null setzen $ax^2 + bx + c = 0$ und Nullstellen der entstandenen quadr. Gleichung bestimmen.

Nullstellenform ⇨ Normalform

Ausmultiplizieren und zusammenfassen.

Normalform ⇨ Scheitelpunktform (quadratische Ergänzung)

1. Vorfaktor von x^2 ausklammern.
2. In der Klammer den Vorfaktor von x suchen. Davon die Hälfte zum Quadrat addieren und sofort wieder subtrahieren.
3. Binomische Formel anwenden und den „Rest“ zusammenfassen.
4. Vorfaktor aus dem 1. Schritt in die Klammer „hineinmultiplizieren“.

Scheitelpunktform ⇨ Normalform

Ausmultiplizieren und zusammenfassen.

$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}}$ (Normalform)

Normalform ⇨ Nullstellenform

Nullstellen bestimmen, z.B. mithilfe der Lösungsformel:

$a = \frac{1}{2}; b = -1; c = -\frac{3}{2}$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\frac{3}{2})}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1 \pm 2}{1}$$

$x_1 = 3; x_2 = -1$

⇨ Nullstellenform:

$y = \frac{1}{2} \cdot (x - 3) \cdot (x - (-1) = \frac{1}{2} \cdot (x - 3) \cdot (x + 1)$

Normalform ⇨ Scheitelpunktform

$$\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} =$$

1 $\quad = \frac{1}{2}[x^2 - 2x - 3] =$

2 $\quad = \frac{1}{2}\left[x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 - 3\right] =$

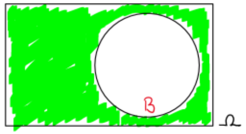
$\quad = \frac{1}{2}[\underbrace{x^2 - 2x + 1} - 1 - 3] =$

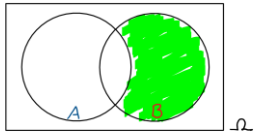
3 $\quad = \frac{1}{2}[(x - 1)^2 - 4] =$

4 $\quad = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 2$

Scheitelpunktform mit Scheitel $S(1|-2)$

9. Gib in Mengenschreibweise an, welche Menge gefärbt ist.





10. Erstelle jeweils eine Vierfeldertafel, um die folgenden Aufgaben zu lösen.

a) 67 % der Maikäfer eines Jahres sind dunkelbraun. Die anderen sind heller gefärbt. 38 % der Maikäfer sind männlich. Bestimme den Anteil der dunkelbraunen, männlichen Maikäfer, wenn 19 % hellbraune, weibliche Käfer sind?

b) Luis sammelt Aufkleber. 885 Aufkleber sind rund, 713 der 2104 bunten Aufkleber sind rund und 636 Aufkleber sind eckig und nicht bunt. Ermittle, wie viele Aufkleber Luis besitzt.

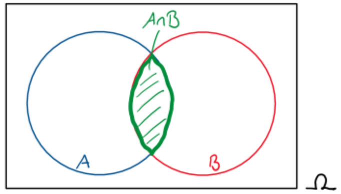
D. Wahrscheinlichkeit verknüpfter Ereignisse

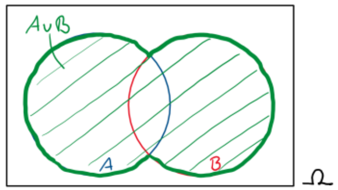
Die Verknüpfung zweier Ereignisse A und B eines Zufallsexperiments können in einem **Mengendiagramm** dargestellt werden. Dabei besteht die **Schnittmenge $A \cap B$** aus den Ergebnissen, die in A „und zugleich“ in B enthalten sind. Die **Vereinigungsmenge $A \cup B$** enthält alle Ergebnisse, die in A „oder auch“ in B sind.

In einer **Vierfeldertafel** können absolute Häufigkeiten oder relative Häufigkeiten (→ Wahrscheinlichkeiten P) der Ereignisse eines Zufallsexperiments übersichtlich eingetragen werden.

	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{\bar{B}}$	
$\boldsymbol{A}$	$P(A \cap B)$ +	$P(A \cap \bar{B})$ =	$P(A)$
$\boldsymbol{\bar{A}}$	$P(\bar{A} \cap B)$ +	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$ =	$P(\bar{A})$
	$P(B)$ +	$P(\bar{B})$ =	$P(\Omega)$

Es gilt: $\boldsymbol{P(A \cup B)} = \boldsymbol{P(A)} + \boldsymbol{P(B)} - \boldsymbol{P(A \cap B)}$





Ein Zufallsexperiment wird 500-mal durchgeführt und die absoluten Häufigkeiten der Ereignisse A und B in eine Vierfeldertafel eingetragen.

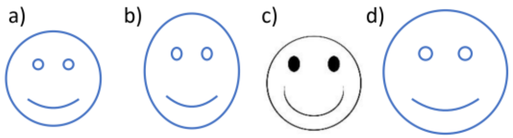
	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{\bar{B}}$	
$\boldsymbol{A}$	100	10	110
$\boldsymbol{\bar{A}}$	310	80	390
	410	90	500

Daraus ergibt sich die Vierfeldertafel mit relativen Häufigkeiten.

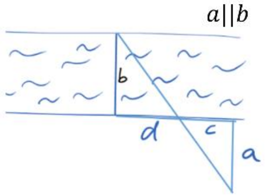
	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{\bar{B}}$	
$\boldsymbol{A}$	$\frac{100}{500} = 20\%$	$\frac{10}{500} = 2\%$	$\frac{110}{500} = 22\%$
$\boldsymbol{\bar{A}}$	$\frac{310}{500} = 62\%$	$\frac{80}{500} = 16\%$	$\frac{390}{500} = 78\%$
	$\frac{410}{500} = 82\%$	$\frac{90}{500} = 18\%$	$\frac{500}{500} = 100\%$

Es gilt: $\boldsymbol{P(A \cup B)} = \boldsymbol{22\%} + \boldsymbol{82\%} - \boldsymbol{20\%} = \boldsymbol{84\%}$

11. Entscheide und begründe, welche der folgenden Figuren ähnlich sind.



12. Es soll die Breite b eines Flusses gemessen werden, ohne auf die andere Seite zu kommen.
Berechne b für
$a = 15\ m$,
$c = 12\ m$ und
$d = 4\ m$.



13. Zur V-Figur in der Spalte nebenan sind folgende Größen gegeben und gesucht.

	Gegeben:	Berechne:
a)	$b_1 = 8\ cm;$ $b_2 = 12\ cm; f = 15\ cm$	e
b)	$c_1 = 7{,}5\ cm;$ $c_2 = 22{,}5\ cm; e = 9\ cm$	f
c)	$b_1 = 7\ cm;$ $e = 4\ cm; f = 10\ cm$	$\overline{B_1B_2}$
d)	$\overline{C_1C_2} = 5\ cm;$ $e = 4\ cm; f = 10\ cm$	c_1

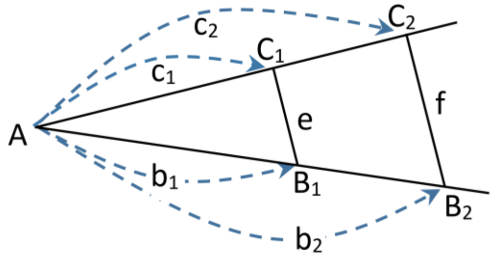
E. Ähnlichkeit und Strahlensatz

Eigenschaften ähnlicher Figuren:

- Entsprechende Winkel sind gleich groß.
- Verhältnisse entsprechender Seiten sind gleich groß.

Zwei **Dreiecke** sind ähnlich (Schreibweise: $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta AB_2C_2$),

- wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen (**WW-Satz**)
- wenn sie im Verhältnis entsprechender Seitenlängen übereinstimmen (**S:S:S-Satz**).

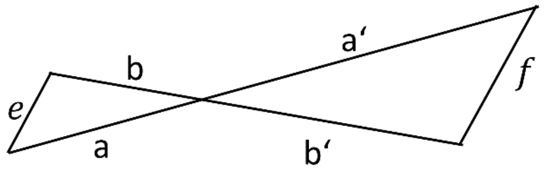


$e||f$

Strahlensatz für die V-Figur:

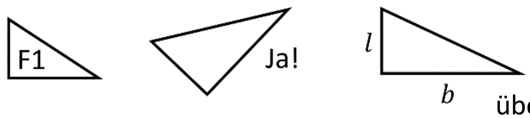
1. $\frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$ und $\frac{b_2 - b_1}{b_1} = \frac{c_2 - c_1}{c_1}$
2. $\frac{f}{e} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$

Strahlensatz für die X-Figur: $\frac{f}{e} = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$



$e||f$

Sind die beiden rechten Dreiecke ähnlich zu F1?



Ja!

Nein, da $l : b$ nicht mit F1 übereinstimmt!

Aufgaben zur V-Figur (siehe nebenan):

- Geg.: $c_1 = 7{,}5\ cm; e = 9\ cm; f = 27\ cm$
  Berechne $\overline{C_1C_2}$.
  $$\frac{f}{e} = \frac{c_2}{c_1} \,|\cdot c_1$$
  $$c_2 = \frac{f}{e} \cdot c_1$$
  $$c_2 = \frac{27\ cm}{9\ cm} \cdot 7{,}5\ cm = 22{,}5\ cm$$
  $$\overline{C_1C_2} = c_2 - c_1 = 22{,}5\ cm - 7{,}5\ cm = 15\ cm$$

- Geg.: $\overline{B_1B_2} = 5\ cm; e = 9\ cm; f = 27\ cm$
  Berechne b_1.
  $$\frac{f}{e} = \frac{b_1 + \overline{B_1B_2}}{b_1}$$
  $$\frac{27\ cm}{9\ cm} = \frac{b_1 + 5\ cm}{b_1}$$
  $$3 = \frac{b_1 + 5\ cm}{b_1} \,|\cdot b_1$$
  $$3b_1 = b_1 + 5\ cm \,| - b_1$$
  $$2b_1 = 5\ cm$$
  $$b_1 = 2{,}5\ cm$$

Aufgabe zur X-Figur (siehe nebenan):
Geg.: $a = 6{,}5\ cm; e = 3\ cm; f = 12\ cm$. Berechne a'!
$$\frac{f}{e} = \frac{a'}{a} \Rightarrow a' = \frac{f}{e} \cdot a = 26\ cm$$

14. Gegeben ist die Potenzfunktion $f(x) = -3x^{17}$.
   a) Beschreibe die Symmetrie und den charakteristischen Verlauf des zugehörigen Graphen G_f.
   b) Gib die Wertemenge W und das Monotonieverhalten von f an.

15. Ziehe die Wurzel.
   a) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$
   b) $\sqrt[4]{0{,}0001}$

16. Löse folgende Potenzgleichungen.
   a) $x^5 = 1$
   b) $x^3 = -27$
   c) $x^6 = 64$

F. Potenzfunktionen mit nat. Exponenten, n-te Wurzel

F.1 Potenzfunktion $\boldsymbol{f(x) = a \cdot x^n}$ $(n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}\backslash 0)$

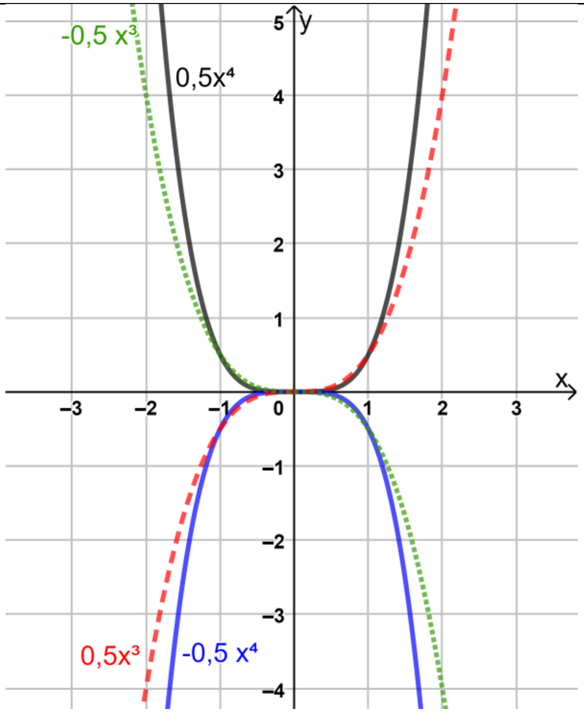
Der Exponent n gibt den **Grad der Potenzfunktion** an. Alle Graphen verlaufen durch die Punkte $O(0|0)$ und $P(1|a)$.

Bei geradem Exponenten n gilt:

- Die Graphen sind achsensymmetrisch zur y-Achse.
- Bei $a > 0$: Graph fällt monoton für $x < 0$
Graph steigt monoton für $x > 0$
„von links oben nach rechts oben“
Wertemenge $W = \mathbb{R}_0^+$
- Bei $a < 0$: Graph steigt monoton für $x < 0$
Graph fällt monoton für $x > 0$
„von links unten nach rechts unten“
Wertemenge $W = \mathbb{R}_0^-$

Bei ungeradem Exponenten n gilt:

- Die Graphen sind punktsymmetrisch zum Ursprung.
- Bei $a > 0$: Graph steigt monoton
„von links unten nach rechts oben“
Wertemenge $W = \mathbb{R}$
- Bei $a < 0$: Graph fällt monoton
„von links oben nach rechts unten“
Wertemenge $W = \mathbb{R}$



F.2 n-te Wurzel und Potenzgleichungen

Die **n-te Wurzel aus der nicht-negativen Zahl a** ist diejenige nicht-negative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt: $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$

Potenzschreibweise: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ Es gilt: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

$\sqrt[6]{1000000} = \sqrt[6]{10^6} = 10$

Die **Potenzgleichung $\boldsymbol{x^n = c}$** hat diese Lösungen:

	n gerade	*n ungerade*
für $c > 0$	$x_{1,2} = \pm\sqrt[n]{c}$	$x = \sqrt[n]{c}$
für $c = 0$	$x = 0$	$x = 0$
für $c < 0$	keine Lösung	$x = -\sqrt[n]{\lvert c\rvert}$

$\boldsymbol{x^4 = 81}$

$x_1 = \sqrt[4]{81} = 3; x_2 = -\sqrt[4]{81} = -3$

$\boldsymbol{x^5 = -32}$

$x = -\sqrt[5]{\lvert -32\rvert} = -\sqrt[5]{32} = -2$

17. Vereinfache den Term und schreibe ihn als Potenz mit rationalem Exponenten.

a) $5^{\frac{1}{4}} : 5^{\frac{1}{6}}$

b) $\left(7^{\frac{1}{6}}\right)^{-\frac{2}{3}}$

c) $\sqrt[7]{\sqrt[4]{b}}$

d) $5c^{\frac{1}{8}} - c^{\frac{1}{5}} + 3c^{\frac{1}{8}}$

F.3 Rechnen mit Potenzen mit rationalen Exponenten

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m;\ a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m}}$$

I. Summen/Differenzen von Potenzen: Zusammenfassen, wenn **Basis und Exponent gleich** sind.

II. Produkte/Quotienten von Potenzen (mit **gleicher Basis**): Exponenten addieren bzw. subtrahieren.

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s};\ a^r : a^s = a^{r-s}$$

III. Potenzieren von Potenzen: Exponenten multiplizieren.

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

IV. Potenzieren von Summen/Differenzen: Exponenten **nicht** verteilen.

V. Potenzieren von Produkten/Quotienten: Exponenten verteilen.

[Hier gilt $a \geq 0; m,n \in \mathbb{Z}; r,s \in \mathbb{Q}$]

I. $7a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}} = (7-1)a^{\frac{1}{3}} = 6a^{\frac{1}{3}}$

II. $4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{6}} = 4^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

$4^{-\frac{1}{3}} : 4^{\frac{1}{6}} = 4^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$

III. $\left(8^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 8^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$

IV. $\left(3^{\frac{1}{2}} + 3^{-\frac{1}{2}}\right)^2 =$

$= \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} + \left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^2 =$

$= 3^1 + 2 \cdot 3^1 + 3^{-1} = 5 + \frac{1}{3} = 5\frac{1}{3}$

V. $(8 \cdot 5)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot \sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$

$(3:4)^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} : 4^{\frac{3}{2}} = (3^3)^{\frac{1}{2}} : \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 =$

$= 27^{\frac{1}{2}} : 2^3 = \frac{\sqrt{27}}{8}$

18. In einem rechtwinkligen Dreieck haben die Katheten die Längen 10 mm und 0,8 cm. Bestimme die Länge der Hypotenuse.

19. Untersuche, ob ein Dreieck mit den Seitenlängen 14 m, 12 m und 6 m rechtwinklig ist.

20. Gegeben ist ein regelmäßiges Sechseck mit Seitenlänge r, das einem Kreis mit Radius $r = 6\ cm$ einbeschrieben ist. Bestimme den Flächeninhalt des Sechsecks.

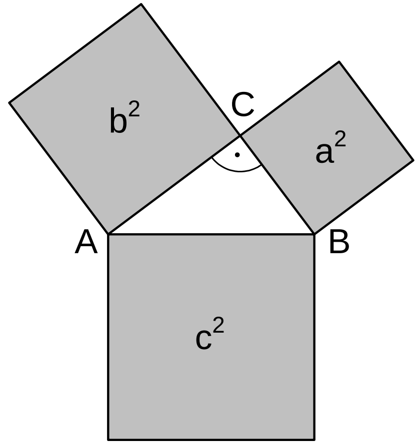
G. Satz des Pythagoras

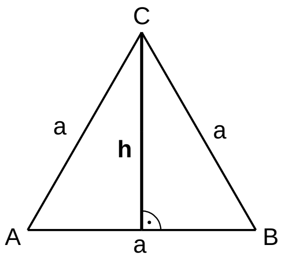
In einem rechtwinkligen Dreieck haben die Quadrate über den Katheten zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse. Es gilt:

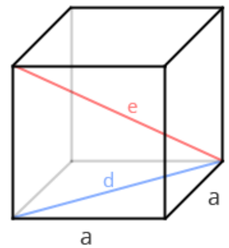
Das Dreieck ABC hat bei C einen rechten Winkel.	$\Leftrightarrow$	$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$

Wichtige Anwendungen:

- Höhe des gleichseitigen Dreiecks:
  $h^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{h = \frac{1}{2}\sqrt{3}a}$
- Diagonale eines Quadrats:
  $d^2 = a^2 + a^2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{d = \sqrt{2}a}$
- Raumdiagonale eines Würfels:
  $d^2 + a^2 = e^2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{e = \sqrt{3}a}$







21. Bestimme die fehlenden Seitenlängen und Winkelgrößen des Dreiecks ABC mit a = 6 m, b = 2,5 m und $\gamma = 90°$.

22. Bestimme $\alpha_1, \alpha_2 \in [0°; 360°]$, für die gilt:

a) $\sin\alpha = 0{,}2588$

b) $\cos\alpha = -0{,}0857$

H. Trigonometrie

Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$\boldsymbol{Sinus} = \dfrac{\boldsymbol{Gegenkathete}}{\boldsymbol{Hypotenuse}}$ $\boldsymbol{Kosinus} = \dfrac{\boldsymbol{Ankathete}}{\boldsymbol{Hypotenuse}}$

$\boldsymbol{Tangens} = \dfrac{\boldsymbol{Gegenkathete}}{\boldsymbol{Ankathete}}$

Beziehungen zwischen sin, cos, tan $(0° \leq \alpha \leq 90°)$:

- Komplemente: $sin\ \alpha = cos\ (90° - \alpha)$
  $cos\ \alpha = sin\ (90° - \alpha)$
- Trigonometrischer Pythagoras: $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $(\alpha \neq 90°)$

Besondere Werte:

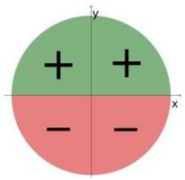
α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$sin\ \alpha$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$
$cos\ \alpha$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.

Sinus und Kosinus am Einheitskreis

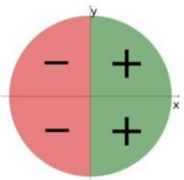
Ist $P(x|y)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis und α der Winkel zwischen der positiven x-Achse und der Strecke $\overline{OP}$, so legt man fest: $\boldsymbol{\cos\alpha = x}$ und $\boldsymbol{\sin\alpha = y}$.

Vorzeichen in den Quadranten:

Sinus

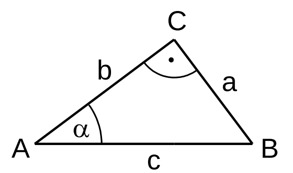


Kosinus

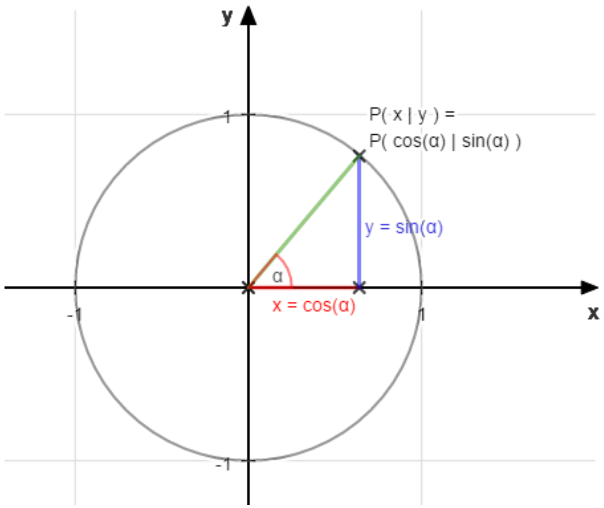


$\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$



Einheitskreis:



Aufgabe: Bestimme alle Winkel zwischen 0° und 360°, für die $\sin\alpha = -0{,}6088$ gilt.

Überlegung: Sinus ist im III. und IV. Quadranten negativ

⇨ Ergebnisse müssen in den Intervallen $[180°;\ 270°]$ und $[270°;\ 360°]$ liegen

TR-Ergebnis: $\alpha \approx -37{,}5°$ liegt nicht in $[0°;\ 360°]$

$\alpha_1 \approx 360° - 37{,}5°$=322,5°

$\alpha_2 \approx 180° + 37{,}5° = 217{,}5°$

Ergebnisse zu den Aufgaben

1. a) 8; b) 1,1; c) $\frac{3}{5}$; d) 0
2. $\left\{-\frac{6}{7};\ 0{,}23;\ 1{,}454545\ldots;\ \sqrt{9}=3;\ \sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}\right\} \in \mathbb{Q}$
   $\{\sqrt{7};\ \pi\} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$
3. a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}=\sqrt{5\cdot 20}=\sqrt{100}=10$
   b) $\sqrt{6400}=\sqrt{64\cdot 100}=\sqrt{64}\cdot\sqrt{100}=8\cdot 10=80$
   c) $\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$
   d) $3\sqrt{7}-10\sqrt{7}=(3-10)\sqrt{7}=-7\sqrt{7}$
   e) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{80}{5}}=\sqrt{16}=4$
   f) $\sqrt{28}=\sqrt{4\cdot 7}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{7}=2\sqrt{7}$
4. a) $\sqrt{x^2+6x+9}=\sqrt{(x+3)^3}=|x+3|$
   b) $\sqrt{s^2-6st+9t^2}=\sqrt{(s-3t)^2}=|s-3t|$
5. a) $\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$
   b) $\frac{1-\sqrt{6}}{5\sqrt{6}}=\frac{(1-\sqrt{6})\cdot\sqrt{6}}{5\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}-6}{5\cdot 6}=\frac{\sqrt{6}-6}{30}$
   c) $\frac{4}{\sqrt{8}+\sqrt{10}}=\frac{4\cdot(\sqrt{8}-\sqrt{10})}{(\sqrt{8}+\sqrt{10})\cdot(\sqrt{8}-\sqrt{10})}=\frac{4\cdot(\sqrt{8}-\sqrt{10})}{8-10}=-2(\sqrt{8}-\sqrt{10})$
   d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)\cdot(\sqrt{5}+1)}=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{5-1}=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}$
6. a) $x_1=\sqrt{\frac{5}{6}}; x_2=-\sqrt{\frac{5}{6}}$; b) $x_1=0; x_2=\frac{3}{4}$
   c) $x_1=3; x_2=2$; d) $x_1=9; x_2=-3$
7. a) $D=-1564<0 \rightarrow keine\ Lösung$
   b) $D=0 \rightarrow eine\ Lösung$
8. a) $x_1=\frac{3}{2}+\sqrt{3};\ x_2=\frac{3}{2}-\sqrt{3};$
   $\rightarrow Nullstellenform: y=\left(x-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)\right)\left(x-\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right)\right)=$
   $=\left(x-\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)$
   $\rightarrow Scheitelpunktform: y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-3$ mit Scheitel $S\left(\frac{3}{2}\middle|-3\right)$
   b) $x_1=2; x_2=22 \rightarrow Nullstellenform: y=-\frac{1}{4}\cdot(x-2)(x-22)$
   $\rightarrow Scheitelpunktform: y=-\frac{1}{4}(x-12)^2+25$ mit Scheitel $(12|25)$
9. links: $\Omega\backslash B$; rechts: $B\backslash A$
10.
    a) 24% der Maikäfer sind dunkel und männlich.

	dunkel	***hell***	
m	24%	14%	**38%**
w	43%	**19%**	62%
	67%	33%	100%

    b) Luis besitzt 2912 Aufkleber.

	rund	$\overline{rund}$	
bunt	**713**	1391	**2104**
$\overline{bunt}$	172	**636**	808
	885	2027	2912

11. a) und d)
12. $b=5\ m$
13. a) $e=10\ cm$; b) $f=27\ cm$; c) $\overline{B_1B_2}=10{,}5\ cm$; d) $c_1=3\frac{1}{3}\ cm$
14. a) n ungerade, a<0 => punktsymmetrisch zum Ursprung; Verlauf „von links oben nach rechts unten“
    b) $W=\mathbb{R}$; Graph fällt monoton
15. a) $\frac{1}{3}$; b) 0,1
16. a) $x=\sqrt[5]{1}=1$; b) $x=-\sqrt[3]{|-27|}=-3$; c) $x_1=\sqrt[6]{64}=2; x_2=-\sqrt[6]{64}=-2$
17. a) $5^{\frac{1}{12}}$; b) $7^{-\frac{1}{9}}=\frac{1}{7^{\frac{1}{9}}}$; c) $b^{\frac{1}{28}}$; d) $8c^{\frac{1}{8}}-c^{\frac{1}{5}}$
18. $\sqrt{164\ mm^2}=2\sqrt{41}\ mm$
19. Nicht rechtwinklig, da $(12\ m)^2+(6\ m)^2=180\ m^2\neq(14\ m)^2=196\ m^2$.
20. Höhe eines gleichseitigen Teildreiecks: $h=3\sqrt{3}\ cm$
    Flächeninhalt eines Teildreiecks: $A_\Delta=9\sqrt{3}\ cm^2$
    $A_{Sechseck}=6\cdot A_\Delta=54\sqrt{3}\ cm^2$
21. $\tan\alpha=\frac{6\ m}{2{,}5\ m}=2{,}4 \rightarrow \alpha\approx 67{,}4° \rightarrow \beta=90°-\alpha=22{,}6°; c=6{,}5\ m$
22. a) $\alpha_1\approx 15°; \alpha_2=180°-\alpha_1=165°$
    b) $\alpha_1\approx 94{,}9°; \alpha_2=360°-\alpha_1=265{,}1°$